

Die dynamische Entwicklung
von magnetischen Flußröhren
in der Konvektionszone der Sonne

Fernando Moreno Insertis
München 1984

Die dynamische Entwicklung
von magnetischen Flußröhren
in der Konvektionszone der Sonne

Dissertation der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Fernando Moreno Insertis
aus Madrid

München, den 12.1.1984

1. Gutachter: Prof. Dr. R. Kippenhahn

2. Gutachter: Prof. Dr. R. Kudritzki

Betreuer der Arbeit: Dr. H.U.Schmidt

Tag der mündlichen Prüfung: 12. März 1984

Zusammenfassung

Das dynamische Verhalten von diskreten magnetischen Flußröhren in der Konvektionszone der Sonne wird mit Hilfe eines numerischen Verfahrens untersucht. Ziel ist eine genaue Beschreibung des Transportes von magnetischen Flußröhren unter verschiedenen Anfangsbedingungen und Annahmen über die Wirkung des umgebenden Mediums. Es werden drei verschiedene Prozeßmodelle berücksichtigt: der Aufstieg von horizontalen magnetischen Flußröhren durch die Konvektionszone, die nichtlineare Entwicklung der Knickinstabilität von anfänglich horizontalen Flußröhren und die Verformung und der Transport von Flußröhren in großräumigen Konvektionszellen. Im Zusammenhang dieser Prozesse wird die Möglichkeit der Speicherung von magnetischem Fluß für Zeiträume, die vergleichbar sind mit einer Sonnenzyklusperiode, diskutiert.

Berechnet wird jeweils die Bewegung der Lagrangeschen Massenelemente einer Flußröhre in einer vertikalen Ebene. Wir benutzen eine etwas modifizierte Version des von Spruit (1981) entwickelten Gleichungssystems für die Bewegung einer dünnen Flußröhre; sie wird in Kap. II vorgestellt und ihre mathematische Struktur analysiert. Die Lösung dieses Systems nichtlinearer partieller Differentialgleichungen bei voller Berücksichtigung der Kompressibilität der Materie in der Flußröhre und der Variation der Zustandsgrößen in der Konvektionszone über viele Größenordnungen erfordert die Aufstellung eines geeigneten numerischen Verfahrens. Das zu diesem Zweck entwickelte Verfahren wird in Kap. III dargestellt, wo auch eine Stabilitätsanalyse desselben durchgeführt wird.

Kap. IV ist dem Transport von magnetischem Fluß in Form von starr horizontalen Flußröhren vom Boden der Konvektionszone zur Photosphäre gewidmet. Nach einem Überblick bereits bekannter Ergebnisse werden Auftriebsterm und Trägheitsterm der Bewegungsgleichung sowie der Strahlungsaustausch zwischen der Flußröhre und dem sie umgebenden Plasma analysiert. Es wird gezeigt, daß bei Flußwerten oberhalb $\sim 10^{20}$ Mx der Aufstieg quasiadabatisch erfolgen muß und daher bei nicht zu hoher Feldstärke von der instabilen Hintergrundsschichtung viel stärker beeinflusst wird als von dem rein magnetisch bedingten Teil des Auftriebs. Lösungen für den Aufstieg aus einem Zustand thermischen oder mechanischen Gleichgewichtes mit der Umgebung unter Berücksichtigung des Strah-

lungsaustausches und der bremsenden Wirkung der Turbulenz des Mediums werden berechnet. Für $\phi \gtrsim 10^{20}$ Mx ergeben sich Aufstiegszeiten, die viel kürzer sind als eine halbe Sonnenzyklusperiode; eine Abweichung von diesem Verhalten weist nur der Aufstieg von Flußröhren hoher Anfangsfeldstärke aus dem mechanischen Gleichgewicht auf, der trotz der instabilen Hintergrundsschichtung quasistatisch und mit einer langsamen, thermisch bedingten Zeitskala erfolgt.

Das fünfte Kapitel befaßt sich mit der zeitabhängigen nichtlinearen Entwicklung der Knickinstabilität in horizontalen Flußröhren. Die Instabilität wird durch eine sinusförmige Anfangsstörung kleiner Amplitude ausgelöst; ihre Entfaltung in Flußröhren hoher Anfangsfeldstärke (etwa $B > 10^{4,5}$ G) ergibt das Eindringen eines Teils der Flußröhre in den stabil geschichteten radiativen Kern der Sonne, wo er eine stabile Lage erreicht. Dieser Prozeß ermöglicht das Verbleiben von magnetischem Fluß in den obersten Schichten des radiativen Kernes für ausgedehnte Zeiträume bis der gesunkene Teil durch Einstrahlung aufgeheizt wieder aus dem Kern aufsteigt. Der obere Teil der instabilen Flußröhre steigt zur Photosphäre auf und kann bei hinreichend hoher Anfangsfeldstärke Anlaß zu einem aktiven Gebiet geben. Der Erörterung dieser Ergebnisse folgt eine kurze Diskussion über die weitere Entwicklung nach dem Ausbruch in der Photosphäre.

Kap. 6 behandelt die Einwirkung von großräumigen Konvektionszellen, die sich über mehrere Dichteskalenhöhen bis zum Boden der Konvektionszone erstrecken, auf die Flußröhrenentwicklung. Das Mitreißen der Flußröhren nicht zu hoher Feldstärke durch die konvektive Strömung ergibt auch in diesem Fall den Transport eines Teiles der Flußröhre zur Oberfläche, während im abwärtsströmenden Gebiet der Zelle die Flußröhre in der tiefen Konvektionszone festgehalten wird. Bei starkem Magnetfeld wird die Verbiegung der Feldlinien von der stark rücktreibenden Wirkung der Lorentz-Kraft erschwert; die Flußröhre kann in diesem Fall der Konvektion ohne große Verformung widerstehen. Eine merkliche Entwicklung von Flußröhren aus dem mechanischen Gleichgewicht kann sich daher nur durch die Entfaltung einer Knickinstabilität ergeben.

Die Schlußfolgerungen dieser Arbeit, insbesondere im Hinblick auf das Verweilen von magnetischen Flußröhren in der Konvektionszone und ihre Speicherung am unteren Rand derselben sind am Ende der Arbeit aufgeführt.

Inhaltsverzeichnis

I	Einleitung	1
II	Magnetohydrodynamische Gleichungen für dünne magnetische Flußröhren	12
	1. Modellannahmen. Das Gleichungssystem.	12
	2. Die Behandlung des Strömungswiderstandes.	18
	3. Mathematische Struktur der Gleichungen. Charakteristiken. Anfangs- und Randbedingungen.	23
III	Numerische Behandlung	27
IV	Der Aufstieg von horizontalen magnetischen Flußröhren durch die Konvektionszone.	36
	1. Reduziertes Gleichungssystem. Magnetischer und konvektiver Auftrieb. Der Trägheitsterm.	39
	2. Der Aufstieg von Flußröhren aus dem thermischen Gleichgewicht.	45
	3. Strahlungsaustausch zwischen der Flußröhre und ihrer Umgebung.	50
	4. Flußröhren im mechanischen Gleichgewicht. Stabilitätsanalyse. Quasistatischer Aufstieg.	54
	5. Zusammenfassung des Kapitels und ergänzende Bemerkungen.	60
V	Zeitabhängige nichtlineare Entwicklung der Knickinstabilität von horizontalen magnetischen Flußröhren.	65
	1. Lineare Stabilitätsanalyse.	65
	2. Der Eintritt von magnetischem Fluß in den radiativen Kern.	70
	3. Der Transport von magnetischem Fluß zur Photosphäre infolge der Instabilität.	85
	4. Bemerkungen zum Ausbruch der Flußröhre in der Photosphäre.	92
VI	Die Bewegung von magnetischen Flußröhren in einer großräumigen Konvektionszelle.	95
	1. Die konvektiven Strömungen unterhalb der Photosphäre.	95
	2. Modell einer Konvektionszelle.	99
	3. Numerische Ergebnisse.	102
VII	Zusammenfassung der Ergebnisse und Schlußfolgerungen.	114
	Anhänge	120
	Symbolverzeichnis	125
	Literaturverzeichnis	129



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555209_0019

I. Einleitung

1.

Die seit Beginn der 70er Jahre mehrfach bestätigte Beobachtungserkenntnis, daß das Magnetfeld an der Oberfläche der Sonne bis zu den kleinsten nachweisbaren Flüssen hauptsächlich in diskreten, filamentaren, konzentrierten Formen auftritt, hat zur theoretischen Erforschung des Ursprungs, der Eigenschaften und der Entwicklung von isolierten magnetischen Flußröhren in der Photosphäre und in der Konvektionszone angeregt. Die Beobachtungen der größten magnetischen Elemente in der Photosphäre, nämlich der Sonnenflecken, liefern eine nach außen abnehmende Verteilung der Magnetfeldstärke, die am äußeren Rand der Penumbra noch Werte von etwa 1300 Gauß aufweist, ab dann aber scharf auf Null abfällt (Beckers und Schröter 1969). Am anderen Ende des Spektrums findet man kleine isolierte magnetische Elemente bis zu $5 \cdot 10^{17} \text{ Mx}$ mit Feldstärken um 1500 Gauß (Mehlretter 1974, Harvey 1977, Zwaan 1981). Dieser Feldstärke entspricht ein magnetischer Druck von ca. 10^5 erg cm^{-3} , der nahe am Wert des photosphärischen Gasdrucks im nichtmagnetisierten Gebiet, nämlich $1.3 \cdot 10^5 \text{ erg cm}^{-3}$ in einer optischen Tiefe $\tau_{5000} = 1$, liegt.

In dem Plasma, das diese starken flußröhrenartigen Feldkonzentrationen umgibt, scheint, wenn überhaupt, nur ein schwaches turbulentes Feld aufzutreten, dessen Struktur und genaue Feldstärke noch unbekannt sind (vgl. Tarbell, Title und Schoolman 1979, Livingston und Harvey 1975). Zwar kann seine wahre vertikale Feldstärke durch Auftreten beider Polaritäten in einem unaufgelösten Gebiet verwischt werden; die negativen Ergebnisse einiger Beobachtungen setzen jedoch eine obere Schranke für dieselbe, die etwa bei 90 Gauß (Stenflo und Lindgren 1977) bzw. bei 50 G (Tarbell, Title und Schoolman 1979) liegt.

2.

Es stellt sich zunächst die Frage nach dem Zustandekommen von solchen konzentrierten magnetischen Strukturen. Schon seit längerer Zeit liegen theoretische Ergebnisse vor, die die Konzentration vom Magnetfeld in einer konvektiven, elektrisch sehr leitfähigen Flüssigkeit auf die Wechselwirkung der konvektiven Strömungen mit dem Magnetfeld zurückführen (Parker 1963, Weiss 1966, Galloway, Proctor und Weiss 1978, Proctor und Weiss 1982; Drobyshevsky und Yuferev 1974). Weiss, Galloway und Proctor z.B. haben aufgrund von nume-



rischen Experimenten gezeigt, daß die konvektive Drehbewegung in einer Konvektionszelle, die von einem anfänglich schwachen und gleichmäßigen Magnetfeld durchdrungen ist, die Magnetfeldlinien mit sich schleppt und an der Wand der Zelle konzentriert und verstärkt. Der Verstärkungsgrad und die Gestalt der Konzentration -eine Schicht, eine Flußröhre- hängen allerdings von der Geometrie der Zelle ab; ersterer ist i.a. proportional zu einer gewissen Potenz der magnetischen Reynolds-Zahl, R_m ,

$$R_m = \frac{V_k \cdot L}{\eta_m}, \quad (1.1)$$

wo V_k die Geschwindigkeit der konvektiven Bewegung, L die Größe der Zelle und η_m die magnetische Diffusivität darstellen, $\eta_m = c^2/4\pi\sigma$, mit σ als elektrischer Leitfähigkeit. Im zweidimensionalen Fall konvektiver Rollen z.B. ergibt sich eine magnetische Schicht mit

$$B = R_m^{1/2} B_0, \quad d = R_m^{-1/2} L, \quad (1.2)$$

wo B_0 das anfängliche Feld und d die Dicke der resultierenden Schicht darstellen. Wenn $R_m \gg 1$ wird das Magnetfeld innerhalb einiger Drehperioden aus dem Inneren der Zelle verdrängt. Die Feldverstärkung durch diesen Mechanismus muß allmählich aufhören, wenn die erreichte Feldstärke so hoch ist, daß sich die Lorentzkraft effektiv der Bewegung widersetzen kann und die Konvektion von der magnetischen Schicht unterdrückt wird.

Die Konzentration des Feldes an den Rändern einer dreidimensionalen Konvektionszelle -wie etwa ein Granulum oder eine Supergranule- kann auch isolierte Flußröhren bilden, und zwar dort wo drei benachbarte Zellen zusammentreffen (Parker 1963, Galloway und Proctor 1983). Die stark überadiabatische Schichtung der obersten Konvektionszone kann dann zum konvektiven Kollaps einer solchen Konzentration führen (Parker 1978, Spruit 1979); dadurch kann die Feldstärke bis auf die beobachteten Werte gebracht werden. Isolierte Flußröhren können auch das Ergebnis von einer instabilen Rippelung einer magnetischen Schicht sein (Galloway und Weiss 1981) oder von doppeldiffusiven Instabilitäten in einem ausgedehnten magnetischen Gebiet mit stabilem Temperaturgradienten und instabilem Magnetfeldgradienten (Acheson 1979, Spiegel und Weiss 1980, Schmitt und Rosner 1983).

Die bisher erwähnten Beobachtungen und theoretischen Ergebnisse, daneben noch einige Arbeiten über die Wechselwirkung zwischen Magnetfeld und Materie-

strömung in einem turbulenten Medium (Kraichnan 1974, 1976, Frisch 1976), führen zu der Annahme, daß auch das Magnetfeld in der tieferen Konvektionszone in konzentrierter Form bzw. in Form von Flußröhren vorkommt; ein charakteristischer Wert für seine Feldstärke ist die Äquipartitionsfeldstärke, $B_{\text{Äq}}$, die durch die Gleichheit zwischen magnetischer Energie und kinetischer Energie der materiellen Strömungen definiert wird:

$$B_{\text{Äq}} \stackrel{\text{def}}{=} (4\pi\rho)^{1/2} V, \quad (1.3)$$

wo V die Geschwindigkeit der jeweils relevanten materiellen Strömung darstellt. Eine Feldstärke von dieser Größenordnung ergibt sich z.B. aus der magnetokonvektiven Vertreibung des Feldes aus einer Konvektionszelle am Boden der Konvektionszone (s. Spiegel und Weiss 1980, Galloway und Weiss 1981).

Es gibt noch andere Hinweise für die Anwesenheit von starken Magnetfeldern in der tiefen Konvektionszone. Galloway und Weiss (1981) haben darauf hingewiesen, daß die typische Längenskala der aktiven Gebiete, etwa 10^5 km, mit keiner charakteristischen Längenskala der Photosphäre, etwa der Druckskalenhöhe, $H_P \sim 100$ km, zusammenfällt, sie entspricht vielmehr der Druckskalenhöhe am Boden der Konvektionszone, $6 \cdot 10^4$ km, als wäre das aktive Gebiet mit seinen konzentrierten magnetischen Elementen -Flecken, Poren- nur die äußere Erscheinung einer tief in der Konvektionszone verankerten Struktur. Schließlich sei auch erwähnt, daß es unmöglich ist, den gesamten, in einem Aktivitätszyklus auftretenden magnetischen Fluß, etwa 10^{24} Mx, in der Konvektionszone in Form von schwachen Feldern, etwa 100 G, unterzubringen (Galloway und Weiss 1981). Mit einem Feld von 10^4 G würde man z.B. eine Schicht mit Querschnitt 20000 km Tiefe $\times$ 60° Breite am Boden der Konvektionszone auffüllen; mit $B = 10^2$ G wäre aber mehr als die ganze Tiefe der Konvektionszone dafür notwendig.

3.

Die physikalischen Prozesse, die zum solaren magnetischen Aktivitätszyklus führen, sind trotz der theoretischen Fortschritte der letzten 20 Jahre noch nicht vollständig geklärt. Die Aufrechterhaltung eines stationären oder oszillierenden Magnetfeldes gegen den vernichtenden Effekt der Ohmschen Dissipation durch ein geeignetes Strömungsfeld ist Aufgabe der Dynamo-Theorien (s. z.B. Moffat 1978, Parker 1979); sie wird durch die folgende sogenannte Induktionsgleichung der Magnetohydrodynamik (MHD) beschrieben, die aus dem

Ohmschen Gesetz und den Maxwell'schen Gleichungen in der MHD-Näherung abgeleitet werden kann:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} (\vec{v} \times \vec{B}) - \text{rot} (\eta_m \text{rot} \vec{B}) . \quad (1.4)$$

In den 60er Jahren sind die sogenannten MFE-Dynamos (Dynamo-Theorien im Rahmen der Elektrodynamik mittlerer Felder) entstanden (s. Steenbeck, Krause und Rädler 1966, Krause und Rädler 1980). Die materiellen Strömungen in diesen Modellen sind turbulenter Natur. Die turbulenten Fluktuationen von Magnet- ($\vec{B}_f$) und Strömungsfeld ($\vec{v}_f$) ergeben einen mittleren Beitrag zur Induktionsgleichung in der Form $\overline{\text{rot}(\vec{v}_f \times \vec{B}_f)}$; in dieser Theorie wird dann gezeigt, daß der Term $\overline{\vec{v}_f \times \vec{B}_f}$ bei nichtspiegelsymmetrischer Turbulenz, wie sie etwa in den Konvektionszonen rotierender Sterne vorkommt, und unter einigen weiteren Bedingungen (s. z.B. Moffat 1978) in erster Näherung proportional zum mittleren Feld, $\vec{B}_m$, sein muß, $\overline{\vec{v}_f \times \vec{B}_f} = \alpha \vec{B}_m$. Der Term $\overline{\vec{v}_f \times \vec{B}_f}$ stellt in diesem Fall einen mittleren elektrischen Strom parallel zum mittleren Feld dar. Das Auftreten eines solchen Termes durch die Wirkung der Turbulenz auf das mittlere Feld wird gewöhnlich α -Effekt genannt (Steenbeck und Krause 1966) und gestattet die Erzeugung von neuem mittleren Feld, wenn $\text{rot}(\alpha \vec{B}_m) \neq 0$. Der α -Effekt wurde bereits von Parker (1955b) in vereinfachter Form eingeführt.

Auf dem α -Effekt sind die sogenannten $\alpha\omega$ - und α^2 -Dynamos aufgebaut. In den $\alpha\omega$ -Dynamomodellen des Sonnenzyklus, die viele der beobachteten Erscheinungen der magnetischen Aktivität der Sonne liefern (s. Stix 1976), oszillieren die azimuthale und die meridionale Komponente des mittleren Magnetfeldes mit einer Periode von 22 Jahren. Die erste wird aus der zweiten durch differentielle Rotation erzeugt. Durch den α -Effekt, und zwar durch die induktive Wirkung der turbulenten Strömungen auf die azimuthale Komponente wird wiederum die meridionale Komponente aufrechterhalten.

Die diskrete Struktur des Magnetfeldes in der Konvektionszone macht nun Änderungen der Theorien des Aktivitätszyklus erforderlich. Für die MFE-Dynamos z.B. ist die Tatsache von Wichtigkeit, daß hohe Feldstärken die turbulente Konvektion in den Flußröhren verhindern (s. Chandrasekhar 1961, Parker 1979), wodurch der α -Effekt in ihrem Innern verringert wird. Auch die Mittelungsverfahren dieser Theorien müssen nachgeprüft werden (s. dazu Stix 1981). Von besonderem Interesse für die vorliegende Arbeit ist aber ein anderes Problem, mit dem

alle Theorien über die Magnetfelderzeugung in der Konvektionszone konfrontiert sind. Gemeint ist die ausgeprägte Tendenz der diskreten Flußröhren, die Konvektionszone innerhalb von Zeiträumen zu verlassen, die kurz sind im Vergleich mit der Halbperiode des Sonnenzyklus. Parker (1955a) zeigte, daß ein magnetisiertes Gebiet im thermischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung durch die Konvektionszone aufsteigen muß. Der im Innern nicht verschwindende magnetische Druck und das Bestehen von seitlichem Druckgleichgewicht zwischen der Röhre und ihrer Umgebung verursachen nämlich eine Dichteverringerng in jener:

$$\left. \begin{array}{l} p_e = p_i + p_m \\ T_e = T_i \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_i < \rho_e \quad (1.5)$$

-die Indizes i bzw. e bezeichnen Größen im Innern bzw. außerhalb der Flußröhre-, die dann einen Auftrieb erfährt und aufsteigen muß. Wird die Fortbewegung der Flußröhre allein durch den aerodynamischen Widerstand des Mediums gebremst, so ist ihre Aufstiegsgeschwindigkeit von der Ordnung der Alfven-Geschwindigkeit (Parker 1975),

$$v = O(v_A), \quad v_A \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{B^2}{4\pi\rho} \right)^{1/2}. \quad (1.6)$$

Für das Äquipartitionsfeld am Boden der Konvektionszone, $B \sim 10^4$ G, beträgt v_A ungefähr 60 m/sec. Würde v_A während des Aufstiegs konstant bleiben, so würde die Flußröhre innerhalb 40 Tagen die Konvektionszone verlassen. Sehr kurze Aufstiegszeiten ergeben sich ebenfalls für alle Feldstärken bis auf die sehr schwachen, von der Ordnung 100 G. Dieses Grundverhalten wird nicht geändert, wenn die Flußröhren statt im permanenten Temperaturgleichgewicht mit der Umgebung adiabatisch aufsteigen (s. Kap IV). Wird der schnelle Aufstieg nicht durch andere Prozesse verlangsamt, bzw. verhindert, so müßte die Konvektionszone in wenigen Jahren ihren magnetischen Fluß in Form von isolierten Flußröhren verlieren. Für den Dynamo-Prozeß wirkt sich dieser hohe Verlust an magnetischem Fluß ähnlich wie eine erhöhte magnetische Diffusivität aus, die ihn in kurzer Zeit zum Stillstand bringen würde.

Auch die horizontalen magnetischen Flußröhren, die sich im mechanischen Gleichgewicht mit der Umgebung befinden, können nicht sehr lange in dieser Lage bleiben. Spruit und Van Ballegooijen (1982) haben eine lineare Stabilitätsanalyse dieses Gleichgewichtes durchgeführt; nach ihren Ergebnissen sind alle horizontalen magnetischen Flußröhren in einem überadiabatisch geschichte-

ten Medium instabil gegenüber adiabatischen Störungen, die die Feldlinien verbiegen; wir werden eine solche Instabilität in dieser Arbeit als Knick-instabilität bezeichnen. Die Anwachsrate dieser Instabilitäten ist typischerweise ein Bruchteil einer inversen Alfven-Zeit, V_A/H_p . Für ein Magnetfeld von 10^4 G und in einer Tiefe $z = 190000$ km ergibt sich

$$H_p / V_A = 10 \text{ Tage} , \quad (1.7)$$

wiederum viel kürzer als eine halbe Sonnenzyklusperiode. Schlußfolgerung dieser Stabilitätsanalyse war, daß die toroidalen Flußröhren im mechanischen Gleichgewicht nur in einem Gebiet mit stabiler, subadiabatischer Schichtung für längere Zeiträume gespeichert werden können. Die Verweilzeit der Flußröhren im subadiabatischen Gebiet ist trotzdem durch einen anderen Effekt beschränkt: aufgrund ihres verminderten inneren Gasdruckes müssen sie kühler als die Umgebung sein:

$$\left. \begin{array}{l} p_e = p_i + p_m \\ \rho_i = \rho_e \end{array} \right\} \Rightarrow T_i < T_e ; \quad (1.8)$$

sie werden demnach durch Einstrahlung von außen geheizt und mithin etwas leichter werden, sie müssen also aufzusteigen anfangen. Der Aufstieg erfolgt auf quasistatischer Weise mit einer langsamen, durch den Strahlungsaustausch bestimmten thermischen Zeitskala (Gurm und Wentzel 1967, Parker 1975; s.a. Kap 5).

Es liegen dann mehrere gewichtige Gründe für die Annahme vor, daß der solare Dynamo-Prozeß am Boden der Konvektionszone bzw. am Übergang zum darunterliegenden, im radiativen Gleichgewicht befindlichen Kern der Sonne stattfindet (s. Spiegel und Weiss 1980, Weiss 1983 und ihre Literaturangaben): einerseits wird das Magnetfeld in der Konvektionszone durch die großräumige Konvektion an ihrem Boden konzentriert; die langfristige Speicherung des magnetischen Flusses in der Konvektionszone scheint andererseits aus den soeben angeführten Gründen ausgeschlossen. Eine Grenzschicht unmittelbar unter der Konvektionszone im subadiabatischen Gebiet, in die noch konvektive Elemente eindringen ("Overshoot-Layer", s. Böhm 1963; s.a. Roxburgh 1965, Saslaw und Schwarzschild 1965), scheint besonders geeignet für einen Dynamo: die eindringenden konvektiven Elemente werden aufgrund der subadiabatischen Schichtung des Mediums heißer und leichter als ihre Umgebung, so daß sie einen Auftrieb erfahren und gestoppt werden. Der Wärmetransport durch Überschießen der Konvek-

tion ist daher negativ, d.h., nach unten gerichtet. Der Temperaturgradient $\frac{d \ln T}{d \ln p}$, wird zwar dadurch etwas größer, d.h. näher am adiabatischen Wert, er bleibt aber nach wie vor subadiabatisch genug, so daß die magnetischen Flußröhren im mechanischen Gleichgewicht in diesem Gebiet stabil sind (s.o.). Turbulente Konvektion und magnetische Flußröhren sind also in einer solchen Schicht vorhanden, so daß der Dynamoprozeß dort noch möglich ist (s. Van Ballegooijen 1982b).

Es bleibt noch die Frage offen, wie der am Boden der Konvektionszone vorhandene magnetische Fluß in das darunter liegende subadiabatische Gebiet gebracht wird. Eine Möglichkeit ist die Speicherung als Folge von den oben erwähnten Knickinstabilitäten (Schmidt 1980, Spruit und Van Ballegooijen 1982). Diese Autoren haben die Vermutung geäußert, daß der sinkende Teil einer solchen Flußröhre den Übergang zwischen der Konvektionszone und dem radiativen Kern überschreiten, in den letzten eindringen und dort eine stabile Lage erreichen könnte. Van Ballegooijen (1982) hat Modelle von Flußröhren im hydrostatischen Gleichgewicht betrachtet, die nach unten bis unmittelbar unter die Konvektionszone hinabreichen, deren oberer Teil aber bis in die oberste Konvektionszone emporragt. Es wurde gezeigt, daß eine solche statische Flußröhre nicht bis in die Photosphäre reichen kann. Um das letztere zu ermöglichen, wurden stationäre Modelle berechnet, in denen sich die Flußröhre bis zur Photosphäre erstreckt und im hydrostatischen Gleichgewicht ist, dafür sich aber mit gleichmäßiger Geschwindigkeit in horizontaler Richtung bewegt. Die Frage, ob und wie eine solche Struktur zustande kommen kann, wurde in der erwähnten Arbeit nicht im Detail behandelt.

4.

Für die mathematische Beschreibung der magnetischen Flußröhren ist in den letzten Jahren eine Näherung entwickelt worden, nämlich die Näherung der dünnen Flußröhren (Defouw 1976, Roberts und Webb 1978, Spruit 1981), die auf die detaillierte Beschreibung der dreidimensionalen Struktur der Flußröhre und des sie umgebenden Plasmas verzichtet und die Flußröhren als eindimensionale Systeme behandelt. Diese Näherung gestattet nur dann eine realistische Beschreibung der Flußröhrenentwicklung, wenn der Radius der Röhre klein ist gegenüber den Längenskalen für die Änderung der wichtigen physikalischen Größen in dem betrachteten Problem. In dem von Spruit (1981)

im Rahmen dieser Näherung entwickelten Formalismus können z.B. sowohl die Bewegung der Flußröhre relativ zum nichtmagnetisierten Hintergrund wie auch die Strömung in der Röhre parallel zu den Feldlinien behandelt werden.

Die Gleichungen für dünne Flußröhren wurden bisher angewandt auf lineare Aufgaben - lineare Stabilitätsanalysen, Bestimmung von Normalschwingungen, u.ä. -, auf die Untersuchung der Röhrenentwicklung unter speziellen Annahmen, die eine statische bzw. eine stationäre Lösung zulassen, oder in einer speziellen Geometrie (etwa vertikale Flußröhren); es handelte sich dabei um Aufgaben, die entweder rein analytisch oder mit einfachen numerischen Mitteln zu bewältigen waren. Will man sich nun mit der zeitabhängigen nichtlinearen Entwicklung einer Flußröhre befassen, so ist die Aufstellung eines Rechenverfahrens für die numerische Lösung des gesamten nichtlinearisierten Gleichungssystems erforderlich. Eine einzelne Flußröhre kann sich zu einem bestimmten Zeitpunkt durch die ganze Konvektionszone von der Photosphäre bis in den radiativen Kern erstrecken, ein bestimmtes Massenelement einer Flußröhre kann auch seine Lage im Laufe der Zeit vom Boden der Konvektionszone bis zur Photosphäre versetzen. Es muß sich daher um ein numerisches Rechenverfahren handeln, das die Kompressibilität der Materie in der Flußröhre berücksichtigt und eine Umschichtung ("Rezoning") des numerischen Gitters im Laufe der Rechnung gestattet.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Untersuchung der zeitabhängigen, nichtlinearen Entwicklung von dünnen magnetischen Flußröhren in der Konvektionszone und in den oberen Schichten des radiativen Kernes der Sonne und hat u.a. das Ziel, die Möglichkeit der Speicherung von magnetischem Fluß unter der Konvektionszone und den Transport desselben zur Photosphäre besser zu verstehen. Es werden dafür drei miteinander eng verbundene Probleme behandelt: der Aufstieg von starr horizontalen Flußröhren zur Photosphäre, die nichtlineare Entwicklung der Knickinstabilität und die Einwirkung von großräumigen Konvektionszellen auf die Dynamik der Flußröhren.

Die Erforschung des Transportes von magnetischem Fluß durch die Konvektionszone zur Oberfläche mittels strikt horizontaler Flußröhren hatte sich bisher grundsätzlich auf Flußröhren im permanenten thermischen Gleichgewicht mit ihrer Umgebung beschränkt. Eine nähere Betrachtung des thermischen Austausches zwischen Flußröhre und Umgebung zeigt (Kap IV), daß diese Annahme

in der Regel nicht gerechtfertigt ist. Ebenso findet sich in der Literatur keine detaillierte Untersuchung des Aufstiegs von anfänglich im mechanischen Gleichgewicht befindlichen Flußröhren durch ein überadiabatisch geschichtetes Gebiet. Wie sich in Kap. IV herausstellt, sind in diesem Fall eine Vielfalt von verschiedenen Aufstiegsweisen möglich in Abhängigkeit vom Wert des magnetischen Flusses und der anfänglichen Feldstärke, die vom schnellen quasiadiabatischen bis zum sehr langsamen, quasistatischen, durch thermischen Austausch angetriebenen Aufstieg reichen. Die Untersuchung von diesen und noch einigen anderen Möglichkeiten des Flußtransportes zur Oberfläche, die für das oben erwähnte Problem des Verlustes an magnetischem Fluß im Aktivitätszyklus von Belang sind, wird nun erst durch eine numerische Behandlung möglich.

Die Berechnung der Entwicklung der Knickinstabilität von am Boden der Konvektionszone liegenden Flußröhren bis ins nichtlineare Régime ist ebenso nur mit numerischen Mitteln durchführbar. Dabei erhofft man sich, die Möglichkeit der Speicherung des Magnetfeldes im radiativen Kern unter der Konvektionszone zeigen zu können. Der obere Teil der instabilen Röhre bewegt sich in Richtung zur Photosphäre. Man kann zeigen (Spruit und Moreno-Insertis, unveröffentlicht), daß Flußröhren im hydrostatischen Gleichgewicht, die sich durch die ganze Konvektionszone erstrecken und am Boden derselben Äquipartitionsfeldstärke besitzen, die Photosphäre nicht in konzentrierter Form erreichen können (vgl. a. Ban Ballegooijen 1982). Es läßt sich vermuten, daß sich dieses Bild ändern muß bei Berücksichtigung von Strömungen entlang den Feldlinien, die durch Abweichungen vom exakten hydrostatischen Gleichgewicht erzwungen werden. Die Flußröhren, die noch konzentriert an der Oberfläche ankommen, werden zu ausgedehnten aktiven Gebieten Anlaß geben. Schließlich kann im Rahmen dieses numerischen Modells die Frage beantwortet werden, ob und wie weit der im Kern versunkene Teil der Flußröhre während dieser letzten Phasen der Instabilitätsentwicklung von der magnetischen Krümmungskraft herausgerissen wird.

Nach der theoretischen Untersuchung von Simon und Weiss (1968) können die konvektiven Strömungen in der tiefen Konvektionszone eine geordnete Struktur in Form von Zellen haben, die sich über mehrere Dichteskalenhöhen erstrecken. Solche großräumigen Strömungen können die Entwicklung der in ihnen befindlichen Flußröhren durch den Strömungswiderstand nachhaltig beeinflussen; bei genügend schwacher Feldstärke können sie sogar ein dominierender Faktor sein. Durch sie kann z.B. die rücktreibende Wirkung der Lorentz-

Kraft auf eine gekrümmte Flußröhre überwunden und Teile einer sonst stabilen Flußröhre zur Photosphäre gebracht werden. Umgekehrt können sie auch den Auftrieb von durch die Konvektionszone aufsteigenden Flußröhren kompensieren und Teile derselben in tiefen Schichten halten. Durch eine numerische Untersuchung möchte man die Möglichkeit und das Ausmaß dieser Prozesse feststellen, quantitative Aussagen darüber erhalten, welche Magnetfelder schwach bzw. stark gegenüber der Konvektion sind, und schließlich eine tiefere Einsicht in die Rolle von Konvektionszellen im Aktivitätszyklus gewinnen.

5.

Im zweiten Kapitel wird zunächst das Gleichungssystem für die Entwicklung von dünnen Flußröhren vorgestellt und erläutert. Der Widerstand des Mediums gegen die Fortbewegung der Flußröhre wird gesondert in II.2 erörtert. Insbesondere wird ein Ausdruck für den turbulenten Widerstand abgeleitet. In II.3 werden die mathematische Struktur der Gleichungen diskutiert und die dazu gehörigen charakteristischen Gleichungen und Kurven abgeleitet.

Das dritte Kapitel ist der Darstellung des numerischen Verfahrens gewidmet; die Hauptmerkmale und -eigenschaften des entwickelten numerischen Schemas werden dargelegt und eine lineare Stabilitätsanalyse desselben durchgeführt.

Der Aufstieg von horizontalen magnetischen Flußröhren durch die Konvektionszone ist der Gegenstand des vierten Kapitels. Abschnitte IV.1 und IV.2 untersuchen mit analytischen und numerischen Mitteln die zwei extremen Fälle des Aufstiegs einer Flußröhre im permanenten thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung bzw. des Aufstiegs einer thermisch isolierten Flußröhre. Dabei werden sowohl der aerodynamische Widerstand des Mediums wie auch die durch die Turbulenz der Konvektionszone verursachte stärkere Bremsung der Röhrenbewegung berücksichtigt. Dem folgt im Abschnitt IV.3 eine Untersuchung des radiativen Austausches zwischen der Flußröhre und ihrer Umgebung. Der Aufstieg von Flußröhren, die sich anfänglich im mechanischen Gleichgewicht befinden, und, insbesondere, die Möglichkeit eines quasistatischen Aufstiegs derselben durch ein instabil geschichtetes Medium werden in IV.4 betrachtet.

Im fünften Kapitel wird die nichtlineare Entwicklung der Knickinstabilität von anfänglich horizontalen Flußröhren in der Konvektionszone numerisch

berechnet und erörtert. Die Speicherung von magnetischem Fluß unter der Konvektionszone, der Aufstieg des oberen Teils der instabilen Flußröhre zur Photosphäre und die letzten Phasen der Entwicklung der Flußröhre kurz vor dem Ausbruch an der Oberfläche werden in den verschiedenen Abschnitten dieses Kapitels behandelt.

Das sechste Kapitel untersucht die Wechselwirkung zwischen den Flußröhren und der großräumig geordneten Konvektion sowie den Einfluß der letzten auf Flußröhren, die sich anfänglich in einem Zustand mechanischen oder thermischen Gleichgewichtes befanden.

Die wichtigsten Schlußfolgerungen der Arbeit werden schließlich im siebten Kapitel aufgeführt.

II. Magnetohydrodynamische Gleichungen für dünne magnetische Flußröhren

1. Modellannahmen. Das Gleichungssystem.

Ausgangspunkt für die Beschreibung der Entwicklung einer isolierten magnetischen Flußröhre in der Konvektionszone der Sonne ist das vollständige dreidimensionale magnetohydrodynamische Gleichungssystem (s. Krall und Trivelpiece 1973, Kippenhahn und Möllenhof 1975, Moffat 1978), das in CGS-Einheiten folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \rho \vec{g} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.2)$$

$$\rho T \left[\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) S \right] = \operatorname{div} \vec{F}_R \quad (2.3)$$

$$p = \frac{\mathcal{R} T \rho}{\tilde{\mu}} \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) - \operatorname{rot} \left[\frac{c^2}{4\pi\sigma} (\operatorname{rot} \vec{B}) \right] \quad (2.6)$$

Dabei bedeutet σ die elektrische Leitfähigkeit, S die Entropie, $\vec{j}$ die elektrische Stromdichte, $\vec{F}_R$ der Strahlungsflußvektor, $\mathcal{R}$ die Gaskonstante und $\tilde{\mu}$ das mittlere Molekulargewicht. Alle anderen Symbole haben ihre gewöhnliche Bedeutung, siehe Symbolverzeichnis, S. 125. Die letzte Gleichung, Gl. 2.6, ist die Induktionsgleichung der Magnetohydrodynamik (1.4). Der Radius der Flußröhren, deren Entwicklung in der vorliegenden Arbeit berechnet wird, ist, von wenigen Ausnahmen abgesehen, klein gegenüber der Längenskala für die Änderung der relevanten physikalischen Größen entlang den Feldlinien, H_* , oder im umgebenden magnetfeldfreien Plasma:

$$r \ll H_* , \quad r \ll H_p , \quad (2.7)$$

wo H_p die Druckskalenhöhe darstellt; z.B. eine zylindrische Flußröhre am Boden der Konvektionszone mit magnetischem Fluß $\phi = 10^{21}$ Mx und Äquipartitionsfeldstärke, $B \sim 10^4$ G, hat einen Radius von $r = 1800$ km, und somit

$$r/H_p \sim 3 \cdot 10^{-2}. \quad (2.8)$$

Die Anwendung der Näherung der dünnen Flußröhren gestattet in diesem Fall eine erhebliche Vereinfachung des Gleichungssystems, wie in der Einleitung bemerkt. Zerlegt man eine beliebige Größe G auf jedem Querschnitt der Flußröhre in Mittelwert $\bar{G}$ und Abweichung ΔG ,

$$G = \bar{G} + \Delta G, \quad (2.9)$$

$\overline{\Delta G} = 0$, so ist die Grundannahme der Näherung der dünnen Flußröhren, daß die Abweichung ΔG vom Mittelwert gering ist; demzufolge können alle Größen in erster Näherung durch ihren Wert auf der Hauptachse approximiert und die Flußröhre als homogen auf jedem Querschnitt betrachtet werden (Defouw 1976, Roberts und Webb 1978). Die Flußröhre wird nunmehr als ein eindimensionales System behandelt, das sich in einem zwei- oder dreidimensionalen unmagnetisierten Hintergrund bewegt. Diese Näherung wurde von Roberts und Webb (1978) mathematisch gerechtfertigt und auf vertikale, seitlich unbewegliche Flußröhren angewandt. In ihrer Arbeit wurde das allgemeine MHD-Gleichungssystem nach Potenzen des kleinen Parameters r/H_* entwickelt, und nur die Null-Ordnung Terme wurden beibehalten. Diese Näherung wurde später von mehreren Autoren übernommen. Insbesondere wurde von H. Spruit (1981) das Gleichungssystem für eine Flußröhre entwickelt, die in einer allgemeinen, dreidimensionalen Bewegung in einer idealen Flüssigkeit begriffen ist; dabei wurden ein kreisförmiger Röhrenquerschnitt und eine wirbelfreie Strömung um die Flußröhre angenommen.

Mit der Schlankheit der Flußröhre verbunden ist die Annahme eines lokal instantanen Druckausgleiches zwischen der Flußröhre und ihrer Umgebung:

$$p_e = p_i + p_m, \quad p_m = B^2/8\pi, \quad (2.10)$$

wobei p_e und p_i den Gasdruck außerhalb bzw. im Inneren der Flußröhre und p_m den magnetischen Druck bezeichnen. Bezeichnet man mit v_{MS} die magneto-sonische Geschwindigkeit, d.h., die für den Druckausgleich senkrecht zu den Feldlinien maßgebende Geschwindigkeit,

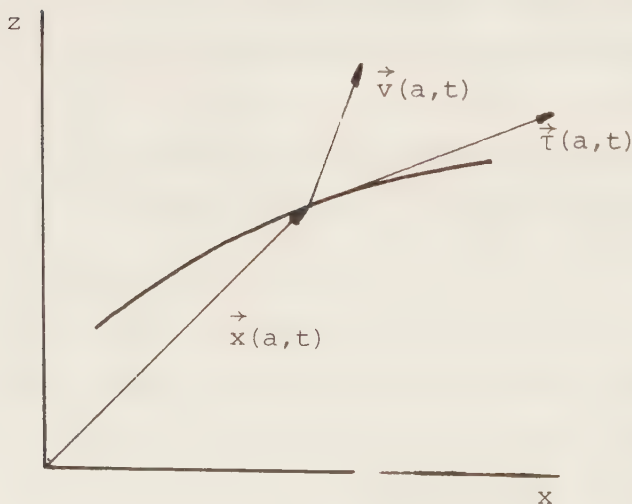
$$v_{MS}^2 = v_A^2 + v_s^2, \quad v_A^2 = \frac{B^2}{4\pi \rho}, \quad (2.11)$$

v_s = Schallgeschwindigkeit, so beruht diese Annahme darauf, daß die Zeitskala für den Druckausgleich senkrecht zu den Feldlinien, r/v_{MS} , kurz ist im Vergleich zu den Zeitskalen der dynamischen und thermischen Vorgänge, die berechnet werden sollen, und zwar einerseits wegen der Schlankheit der Flußröhre, (2.7), und andererseits deswegen, weil v_{MS} größer als Schallgeschwindigkeit und Alfvengeschwindigkeit ist und die zu berechnenden Bewegungen der Flußröhre immer mit Unterschallgeschwindigkeit erfolgen.

Das Gleichungssystem, das in der vorliegenden Arbeit benutzt wird, basiert auf der letztgenannten Arbeit von Spruit. Darüber hinaus führen wir eine vollständige Lagrange-Beschreibung der Materie in der Flußröhre ein und ersetzen die von Spruit angenommene, durch die wirbelfreie Umströmung verursachte zusätzliche Trägheit der Flußröhre durch für unser Problem geeignete Formen des Strömungswiderstandes (Abschnitt II.2).

Im folgenden wollen wir die zweidimensionale Bewegung einer Flußröhre in einer vertikalen Ebene mit Koordinaten x, z untersuchen. Die Konvektionszone wird als planparallel geschichtetes Medium betrachtet; darüber hinaus werden keine Effekte berücksichtigt, die von der Sonnenrotation herrühren.

Sei $\vec{x}(a, t)$ der Ortsvektor eines Punktes einer Flußröhre mit Komponenten $(x(a, t), z(a, t))$, wobei t die Zeit und a den noch zu bestimmenden Kurvenparameter darstellt.



Im Lagrange-Bild verfolgt man die Bewegung von einzelnen Massenelementen der Flußröhre. Zweckmäßigerweise wird a als Lagrange-Koordinate, und zwar als die integrierte Masse entlang der Flußröhre definiert:

$$a = \int_{s_0}^s \xi \, ds + a_0, \quad (2.12)$$

wobei ξ die Dichte pro Längeneinheit, $\xi = \frac{dm}{ds}$, und s die Bogenlänge entlang der Röhre bezeichnet. Ansonsten führen wir folgende Symbole ein:

$$\text{Geschwindigkeit, } \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right)_{a=\text{const}} = (u(a,t), v(a,t)) \quad (2.13)$$

$$\text{Tangentenvektor, } \vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial a} \right)_{t=\text{const}} = (\mu(a,t), \nu(a,t)), \quad \tau \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{\tau}| \quad (2.14)$$

$$\text{Tangenteneinheitsvektor } \vec{\theta} = \frac{\vec{\tau}}{\tau}, \quad (2.15)$$

$$\text{und es gilt } \tau = \frac{ds}{da} = \frac{1}{\xi}. \quad (2.16)$$

Die partielle Ableitung $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{a=\text{const}}$ ist die sogenannte substantielle oder konvektive Ableitung, die gewöhnlich mit $\frac{D}{Dt}$ bezeichnet wird, um Verwechslung mit der Euler-Ableitung $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\vec{x}=\text{const}}$ zu vermeiden. Wir schließen uns dieser Bezeichnung an und schreiben

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{a=\text{const}} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{D}{Dt}, \quad \vec{v} = \frac{D\vec{x}}{Dt}. \quad (2.13b)$$

Bei der Ableitung der Gleichungen für eine dünne Flußröhre aus (2.1)-(2.6), die wir im Rest dieses Abschnitts erläutern wollen, folgen wir, wie oben gesagt, der Arbeit von Spruit (1977). Im folgenden bezeichnet der Index i die physikalischen Größen in der Flußröhre, der Index e die des umgebenden Plasmas.

Kontinuitäts- (2.1) und Induktionsgleichung (2.6) ergeben bei unendlicher elektrischer Leitfähigkeit

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \right) = \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{v}. \quad (2.17)$$

Mit $\xi = \rho \cdot A$, A als Querschnittsfläche der Röhre und ϕ als magnetischer Fluß ergibt sich aus (2.15) und (2.16)

$$\frac{\vec{B}}{\rho} = \frac{B \vec{\theta}}{\xi/A} = \frac{\phi}{\xi} \vec{\theta} = \phi \vec{\tau}, \quad (2.18)$$

und somit aus (2.17) mit $\phi = \text{const}$

$$\boxed{\frac{D\vec{\tau}}{Dt} = (\vec{\tau} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial a}} \quad (2.19)$$

Kontinuitäts- und Induktionsgleichung zusammen ergeben dann im Lagrange-Bild die einfache Bedingung, daß die gemischten zweiten Ableitungen von $\vec{x}(a,t)$ gleich sind.

Die Bewegungsgleichung (2.2) zerfällt in ihre zwei Komponenten parallel und senkrecht zur Flußröhre. In tangentialer Richtung hat man keine Komponente der Lorentz-Kraft. Die über den lokalen Querschnitt gemittelte Gleichung lautet dann:

$$\rho_i (D_t \vec{v})_{||} = -\vec{\theta} \cdot \nabla p_i + \rho_i g_{||} \quad , \quad (2.20)$$

$$\text{wo } D_t \vec{v} \equiv \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad , \quad (D_t \vec{v})_{||} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot \vec{\theta} \quad \text{und } g_{||} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{g} \cdot \vec{\theta}.$$

Sei $\vec{N}$ der Einheitsvektor normal zur Flußröhre und κ die Krümmung,

$$\frac{d\vec{\theta}}{ds} = \kappa \vec{N} \quad . \quad (2.21)$$

Die Komponente der Bewegungsgleichung in Richtung $\vec{N}$ enthält die Lorentz-Kraft. Für die Ableitung dieser Gleichungskomponente muß man vorerst die Näherung der dünnen Flußröhren verlassen und eine allgemeine kontinuierliche Magnetfeldverteilung betrachten. Gemäß der möglichen Zerlegung der Lorentz-Spannungen in einem isotropen Druck und einer Spannung entlang den Feldlinien,

$$T_{ij} = p_m \delta_{ij} - \frac{B_i B_j}{4\pi} \quad ,$$

kann man die Lorentz-Kraft wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} = \left[\kappa^* \frac{B^2}{4\pi} - (\vec{N}^* \cdot \nabla) \frac{B^2}{8\pi} \right] \vec{N}^* \quad , \quad (2.22)$$

wo $\vec{N}^*$ und κ^* jetzt den Normalvektor und die Krümmung einer einzelnen Feldlinie bezeichnen:

$$\left(\frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla \right) \frac{\vec{B}}{B} = \kappa^* \vec{N}^* \quad . \quad (2.23)$$

Ersetzt man jetzt $\frac{\vec{j}}{c} \times \vec{B}$ in Gl. (2.2) durch (2.22), betrachtet dann die Komponente von (2.2) normal zu den Feldlinien und kehrt zurück zur Näherung der dünnen Flußröhren, indem man die so erhaltene Gleichung über jeden Querschnitt der Flußröhre mittelt, so bekommt man (Spruit 1981)

$$\rho_i (D_t \vec{v}) \cdot \vec{N} = (\rho_i - \rho_e) \vec{g} \cdot \vec{N} + \kappa \frac{B^2}{4\pi} + R, \quad (2.24)$$

wo R die Rückwirkung des äußeren Mediums auf die Bewegung der Flußröhre beschreibt. Im einfachsten Fall der Potentialströmung einer reibungsfreien Flüssigkeit um einen ungekrümmten Zylinder nimmt R die Form einer zusätzlichen Trägheit an:

$$R = -\rho_e \cdot D_t \vec{v} \cdot \vec{N} , \quad (2.25)$$

welche der durch die Beschleunigung des Zylinders im äußeren Medium verursachten Impulsänderung entspricht.

Die Annahme einer Potentialströmung um die Röhre ist jedoch unrealistisch für die in dieser Arbeit vorkommenden hohen Werte der Reynolds-Zahl, so daß wir für R entweder den Ausdruck des aerodynamischen Widerstandes oder eine geeignete Formel für die durch Turbulenz hervorgerufene viskose Bremsung einsetzen werden. Dieser Punkt wird im nächsten Abschnitt im Detail diskutiert (II.2). Wir schreiben vorerst allgemein $R = F_D^L/A$, wo F_D^L die Widerstandskraft pro Längeneinheit der Röhre und A den Röhrenquerschnitt darstellt, und weiter

$$\Delta\rho = \rho_i - \rho_e$$

$$\vec{g} \cdot \vec{N} = g_{\perp} \quad (2.26)$$

$$(D_t \vec{v}) \cdot \vec{N} = (D_t \vec{v})_{\perp} .$$

Dann ergibt sich aus (2.24)

$$\rho_i (D_t \vec{v})_{\perp} = g_{\perp} \Delta\rho + \kappa \frac{B^2}{4\pi} + \frac{F_D^L}{A} .$$

(2.27)

Das vollständige Gleichungssystem setzt sich nun aus Gl. (2.19), (2.20) und (2.27) sowie aus Gl. (2.3) - (2.5) und (2.10) zusammen. In ihm sind alle physikalischen Größen der Flußröhre als Funktion der Lagrange-Koordinate a und der Zeit t aufzufassen:

$$D_t \vec{\tau} = \partial_a \vec{v} \quad (2.28)$$

$$\rho_i (D_t \vec{v})_{\parallel} = -\frac{1}{\tau} \partial_a p_i + \rho_i g_{\parallel} \quad (2.29)$$

$$\rho_i (D_t \vec{v})_{\perp} = \kappa \frac{B^2}{4\pi} + \Delta\rho \cdot g_{\perp} + F_D^L/A \quad (2.30)$$

$$\rho_i T_i D_t S_i = Q \quad (2.31)$$

$$B \cdot A = \phi = \text{const} \quad (2.32)$$

$$p_e = p_i + p_m \quad (2.33)$$

$$p_i = \frac{R \rho_i T_i}{\bar{\mu}} \quad (2.34)$$

mit $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial a}$. Q (Gl. 2.31) stellt einen über den Querschnitt der Flußröhre gemittelten Wert der Wärmeaufnahme pro Zeiteinheit in der Röhre durch Strahlungsaustausch mit der Umgebung dar. Ein angenäherter Ausdruck für Q sowie besondere Formen der Energiegleichung - ständiges thermisches Gleichgewicht mit der Umgebung bzw. thermische Isolierung - und ihr Anwendungsbereich werden in Kap. IV diskutiert.

2. Die Behandlung des Strömungswiderstandes

Ein Ausdruck für den Mediumswiderstand F_D^L in Gl. 2.30 kann zunächst mit Hilfe der Ergebnisse von Windkanalexperimenten bestimmt werden, in denen die Widerstandskraft auf eine zylindrische Röhre gemessen wird, die sich in einer weitweg von der Röhre homogenen, zur Hauptachse des Zylinders senkrechten Strömung befindet (s. z.B. Batchelor 1967, Tritton 1977; Parker 1975). Man drückt gewöhnlich diese Kraft mit Hilfe der Widerstandsbeizahl C_D folgendermaßen aus:

$$|F_D^L| = C_D \frac{\rho_e}{2} v^2 d, \quad (2.35)$$

wo d den Durchmesser des Zylinders und V den asymptotischen Wert der Strömungsgeschwindigkeit weit weg von demselben darstellt. C_D hängt allein von der Reynolds-Zahl ab (Goldstein 1938):

$$C_D = C_D(\text{Re}) , \quad (2.36)$$

$$\text{Re} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Vd}{\nu_m} , \quad \nu_m = \text{kinematische Viskosität} . \quad (2.37)$$

Für $10^5 \gtrsim \text{Re} \gtrsim 10^2$ ergeben die Experimente $C_D \sim 1$. Hinter dem Zylinder bildet sich in diesem Bereich von Reynolds-Zahlen ein Totwassergebiet (s. Goldstein 1938, Bd. II), so daß der Widerstand größenordnungsmäßig gleich dem Produkt vom Staudruckunterschied zwischen der vorderen und hinteren Seite des Zylinders, $\frac{1}{2} \rho_e V^2$, mal seinen Durchmesser ist. Für kleinere Reynolds-Zahlen spielt die Viskosität des Mediums eine immer wichtigere Rolle: C_D ist dann annähernd proportional zu Re^{-1} , und F_D hängt nur linear von der Geschwindigkeit ab (Abb. 2.1).

Die Reynolds-Zahlen, die sich bei der Bewegung von Flußröhren durch die Konvektionszone ergeben, sind in der Regel sehr viel größer als 10^2 . Für eine sich mit Alfven-Geschwindigkeit in der unteren Konvektionszone bewegende Flußröhre mit einer Feldstärke von 100 G und einem Radius von 100 km ergibt sich z.B. $\text{Re} \approx 10^8$. Man hat in früheren Arbeiten über Flußröhren in der Konvektionszone deswegen sehr oft (2.35) mit $C_D = 1$ als Widerstandsformel benutzt - aerodynamischer Widerstand genannt (z.B. Parker 1975).

Die Anwendung von (2.35) auf Flußröhren in der Konvektionszone kann nur als ein erster Schritt zur Bestimmung von F_D^L angesehen werden. Denn die konvektive Bewegung in der Konvektionszone der Sonne muß aufgrund der niedrigen molekularen Viskosität turbulenter Natur sein. Nach der Kolmogorovschen Theorie (1941) bilden die Konvektionszellen mit der größten räumlichen Ausdehnung, L_m , nur den Anfang einer Kaskade von kleineren turbulenten Zellen, deren Größen das ganze Spektrum von L_m bis zu einem minimalen Wert L_d erfüllen. Die Energie der größten Zellen wird an die kleineren weitergegeben, bis sie in den Zellen mit Größe L_d dissipiert wird. Die Bremsung der Fortbewegung der Flußröhre durch ein solches turbulentes Medium kann viel größer sein als durch (2.35) mit $C_D = 1$ gegeben, und es ist schwierig, sie auch nur annähernd zu bestimmen. Die oben zitierten Windkanalexperimente, insbesondere, sind in nichtturbulenten Strömungen durchgeführt worden.

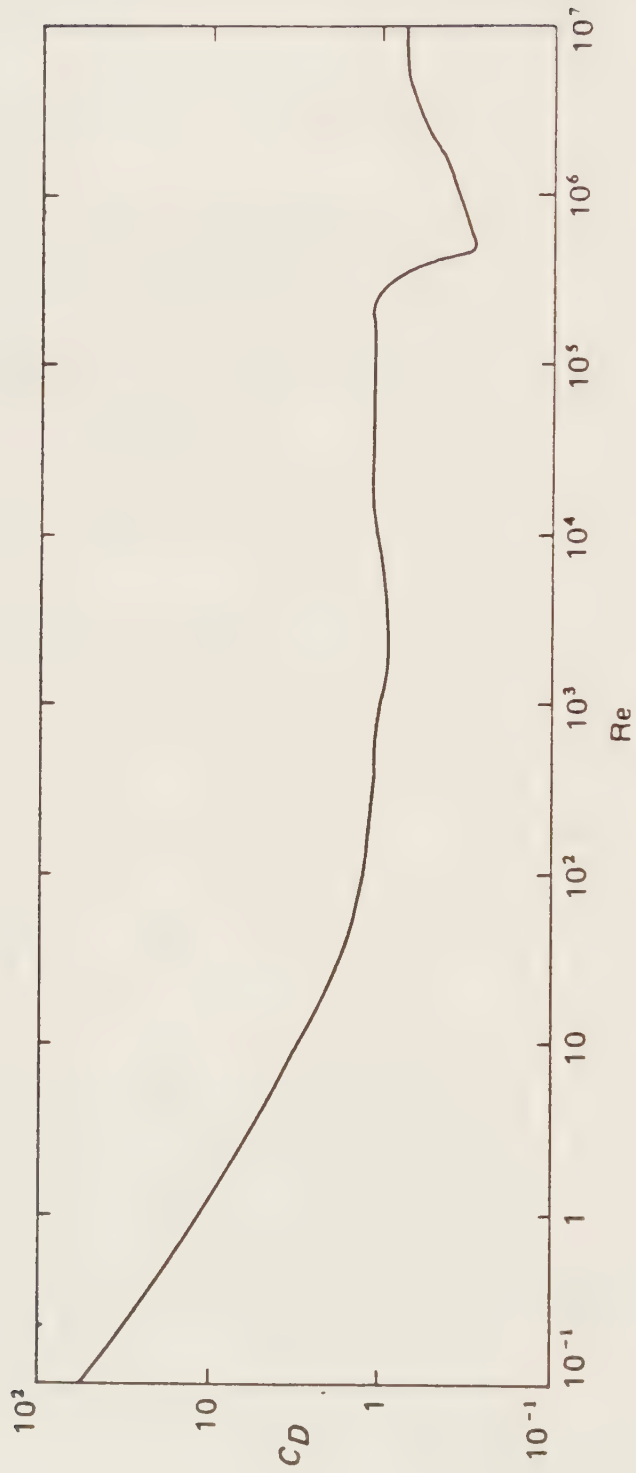


Abb. 2.1 - Änderung der Widerstandsbeizahl C_D mit der Reynolds-Zahl für einen Kreiszylinder (Aus Tritton 1967).

Ein häufig benutzter Ausweg aus der Kompliziertheit des Problems des turbulenten Transportes, mithin auch der turbulenten Reibung, ist es, einen Koeffizienten der turbulenten Viskosität, ν_e , einzuführen, der den Impulstransport durch die Zufallsbewegung der turbulenten Wirbel quer durch Scherflächen beschreibt. Da ν_e um einige Größenordnungen größer als die molekulare Viskosität ist, so muß auch die aufgrund von ν_e gebildete turbulente Reynolds-Zahl:

$$Re_t = \frac{V d}{\nu_e} \quad , \quad (2.38)$$

einige Größenordnungen kleiner als Re (Def. 2.37) und die turbulente viskose Bremsung effektiver sein als die durch die aerodynamische Widerstandsformel gelieferte.

Im Bereich der kleinen turbulenten Reynolds-Zahlen kann man deshalb die Oseen-Stokessche Formel für die Bremsung eines Zylinders verwenden, der sich in einer viskosen Flüssigkeit mit Geschwindigkeit V bewegt (Oseen 1927, Lamb 1932, §343),

$$|F_D^L| = \frac{4\pi\rho_e\nu_e \cdot V}{h} = \frac{1}{h} \frac{8\pi}{Re_t} \rho_e \frac{dV^2}{2} \quad , \quad (2.39)$$

mit $h = 2.002 - \ln Re_t$.^{*}

Die Oseen-Stokessche Formel stellt eine gute Näherung an den experimentellen Daten nur für Reynolds-Zahlen unter ~ 4 dar; für hohe Reynolds-Zahlen muß man andererseits wieder die aerodynamische Widerstandsformel - (2.35) mit $C_D = 1$ - allein benutzen (Abb. 2.1). Wir benutzen daher (2.39) als Formel für die turbulente Bremsung nur für $Re_t < 2.72$. Oberhalb $Re_t = 8\pi$ wird die aerodynamische Widerstandsformel benutzt, und für den Bereich zwischen $Re_t = 2.72$ und $Re_t = 8\pi$ verwenden wir eine Interpolationsformel, nämlich (2.39) mit $h = 1$.

Man hat oft ν_e durch $\frac{1}{3} V_{conv} \cdot L_{conv}$ ersetzt, wo V_{conv} und L_{conv} die charakteristische Geschwindigkeit bzw. Längenskala der größten konvektiven Elemente in dem Niveau der Konvektionszone, wo sich die Röhre befindet, darstellen. Da der Radius der Flußröhre i.a. viel kleiner ist als L_{conv} , ist es

^{*} Die von Pneumann und Raadu (1972) entwickelte, von anderen Autoren benutzte Formel für den turbulenten viskosen Widerstand kann i.a. auf die Bewegung von dünnen Flußröhren nicht angewandt werden (s. dazu Kuznetsov und Syrovatskii, 1979).

angebracht, die Kolmogorovsche Theorie der Turbulenz anzuwenden. Dann bekommt man (s. Anhang A)

$$v_e = \frac{1}{3} v_{\text{conv}} \cdot r \cdot \left(\frac{r}{L_{\text{conv}}} \right)^{1/3}, \quad (2.40)$$

wo r den Querschnittsradius darstellt.

In der beschleunigten Bewegung von Körpern durch zähe Flüssigkeiten kommen in der Bewegungsgleichung zum Widerstandsterm noch weitere Terme hinzu, die die von der umgebenden Flüssigkeit verursachte zusätzliche Trägheit des Körpers beschreiben, analog zum Fall einer Potentialströmung um einen Zylinder, siehe II.1. Im Fall einer Kugel (s., z.B., Basset 1961, Landau und Lifshitz 1974, Maxey und Riley 1983) ist eine allgemeine Lösung für beliebig beschleunigte Bewegungen möglich. Unter den neuen Termen befindet sich einer der von der Vorgeschichte der Kugelbewegung bis zum betrachteten Zeitpunkt explizit abhängt. Er enthält nämlich das zeitliche Integral der Beschleunigung multipliziert mit einer zeitabhängigen Gewichtsfunktion. Im Fall einer gekrümmten zylindrischen Röhre gibt es keine allgemeine Lösung. Auch wenn es eine gäbe, würde die Berücksichtigung von solchen Integraltermen eine unangemessene Kompliziertheit bei der Lösung des Problems mit sich bringen.

Wir werden deshalb im folgenden nur die eigene Trägheit der Flußröhre berücksichtigen, $\rho_i \frac{d\vec{v}}{dt}$. Da wir keine impulsive Bewegungen rechnen wollen, wird der durch diese Vernachlässigung verursachte Fehler kaum größer sein als ein Faktor 2 im Trägheitsterm. Eine ähnliche Ungewißheit hat man ohnehin im Widerstandsterm und zwar durch die Annahme eines kreisförmigen Querschnitts der Flußröhre. In früheren Arbeiten mit Flußröhren hat man auch die eigene Trägheit der Flußröhre vernachlässigt und angenommen, daß die Bewegung der Flußröhre im asymptotischen Regime abläuft, wo die Widerstandskraft die Antriebskräfte - etwa die Auftriebskraft - genau kompensiert. In der vorliegenden Arbeit wird die eigene Trägheit der Flußröhre berücksichtigt, weil sie, wie es sich später zeigen wird, bei der Entwicklung einiger der zu rechnenden Flußröhren eine nicht vernachlässigbare Rolle spielt, wie etwa beim adiabatischen Aufstieg horizontaler Flußröhren schwacher Feldstärke, und zwar wegen der Schichtung der Konvektionszone (IV.1, IV.2), sowie in einigen Phasen der Entwicklung der Flußröhreninstabilitäten (Kap. V).

3. Mathematische Struktur der Gleichungen. Charakteristiken.

Anfangs- und Randbedingungen.

Für die Untersuchung der mathematischen Struktur der Gleichungen betrachten wir der Einfachheit halber nur den Fall der adiabatischen Entwicklung der Flußröhre. Gleichung (2.31) läßt sich dann im Lagrange-Formalismus unmittelbar integrieren:

$$S_i(a, t) = S_i(a, 0), \quad (2.41)$$

und da alle Flußröhren in den Rechnungen dieser Arbeit anfänglich isentropisch sind:

$$S_i(a, t) = \text{const.} \quad (2.41b)$$

Da außerdem die Entropie eine Funktion von Druck und Dichte ist, läßt sich (2.41) als eine Beziehung zwischen $p_i(a, t)$ und $\rho_i(a, t)$ deuten. Dann ist das System (2.28)-(2.34) im Grunde ein System von 4 partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in den Variablen a, t für die Funktionen $x(a, t), z(a, t)$. Alle anderen im System vorkommenden Variablen lassen sich formal als Funktion von z und den ersten Ableitungen von x und $z, \vec{\tau}, \vec{v}$, auffassen, wenn auch wegen der im allgemeinen komplizierten Abhängigkeit der Entropie von p und ρ und wegen Gleichung (2.33) als solche nicht explizit angeben. Denn durch die elementare Beziehung (2.18) kann die Bedingung des seitlichen Druckgleichgewichts, (2.33), als eine Beziehung zwischen den Variablen p_i, ρ_i und τ mit einer bekannten Funktion $p_e(z)$ verstanden werden. Zusammen mit (2.41) ergeben sich daraus ρ_i und p_i , mithin auch B , als implizite Funktionen von z und τ . Formal sind dann in den 4 Gleichungen (2.28)-(2.30) außer $\partial_t \vec{v}, \partial_a \vec{v}, \partial_t \vec{\tau}$ und $\partial_a \vec{\tau}$ nur Funktionen von $z, \vec{v}$ und $\vec{\tau}$ enthalten^(*):

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(\tau, z) & \partial_a p_i &= \partial_a p_i(z, \tau, \partial_a \tau) \\ \rho_i &= \rho_i(\tau, z) & \kappa &= \kappa(z, \vec{\tau}, \partial_a \vec{\tau}) \\ B &= B(\tau, z) & F_D^L &= F_D^L(z, \tau, \vec{v}). \end{aligned} \quad (2.42)$$

* Bei Berücksichtigung von Konvektionszellen im äußeren Medium (Kap. 6) würde F_D^L explizit von x abhängen, somit auch J_2 in (2.43). Das ändert jedoch nichts an den folgenden Überlegungen.

Ersetzt man $\vec{\tau}$ und $\vec{v}$ durch $\partial_a \vec{x}$, $\partial_t \vec{x}$, so reduziert sich das System (2.28)-(2.34) auf ein System zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktionen $x(a,t)$, $z(a,t)$, das man abgekürzt folgendermaßen schreiben kann:

$$\begin{cases} \vec{I}_1(z, \vec{\tau}) \cdot \partial_{tt} \vec{x} + \vec{I}_1'(z, \vec{\tau}) \cdot \partial_{aa} \vec{x} + J_1(z, \vec{\tau}) = 0 \\ \vec{I}_2(z, \vec{\tau}) \cdot \partial_{tt} \vec{x} + \vec{I}_2'(z, \vec{\tau}) \cdot \partial_{aa} \vec{x} + J_2(z, \vec{\tau}, \vec{v}) = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

wo J_1 und J_2 die inhomogenen Terme darstellen, d.h., die Summe der Terme in (2.29), bzw. (2.30), die keine Ableitung der höchsten Ordnung enthalten, und $\partial_{aa} \equiv \frac{\partial^2}{\partial a^2}$, $\partial_{tt} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Das System (2.28)-(2.34) bzw. (2.43) ist offensichtlich nicht linear. Wie schon in (2.43) angedeutet, treten dennoch die Ableitungen zweiter Ordnung immer in linearen Beziehungen auf, multipliziert mit Koeffizienten, die nur von z und den ersten Ableitungen $\vec{\tau}$, $\vec{v}$ abhängen. Das System ist deshalb quasilinear (s. Courant, Hilbert, 1968) und auch, da es die Terme J_1 und J_2 enthält, inhomogen.

Die mathematische Struktur eines Differentialgleichungssystems läßt sich am besten durch die Berechnung der zu ihm gehörenden charakteristischen Gleichungen erkennen (s. Courant und Hilbert, 1968, Sauer und Szabo 1967). Die Kenntnis ihrer Lösungen, der Charakteristiken des Systems, gestattet die Bestimmung der für seine Lösung notwendigen Anfangs- und Randbedingungen. In unserem Fall ergeben sich aus (2.28)-(2.34) bzw. aus (2.43) nach Berechnung einer Determinante 6^{ter} Ordnung folgende charakteristische Gleichungen:

$$I \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \pm \frac{1}{\tau} \left(\frac{B^2}{4\pi\rho_i} \right)^{1/2} = \pm \frac{v_A}{\tau} \end{array} \right. \quad (2.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \pm \frac{1}{\tau} \frac{v_A v_s}{(v_A^2 + v_s^2)^{1/2}} \stackrel{\text{def}}{=} \pm \frac{v_T}{\tau} \end{array} \right. \quad (2.45)$$

$$II \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu}{\tau} [du - (\pm \frac{v_T}{\tau}) d\mu] - \frac{\nu}{\tau} [dv - (\pm \frac{v_T}{\tau}) dv] = J_1 dt \end{array} \right. \quad (2.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\nu}{\tau} [du - (\pm \frac{v_A}{\tau}) d\mu] + \frac{\mu}{\tau} [dv - (\pm \frac{v_A}{\tau}) dv] = -J_2 dt \end{array} \right. \quad (2.47)$$

$$\text{mit } V_T^2 = \frac{V_s^2 V_A^2}{V_A^2 + V_s^2} . \quad (2.48)$$

Die erste Gruppe von Gleichungen, (I), sind die charakteristischen Gleichungen in der (a,t) -Ebene, die zweite, (II), ihre Abbildungen im $(\vec{x}, \vec{v}, \vec{t})$ -Raum. Bemerkenswert ist die einfache Struktur der Gleichungen (I), die erlaubt, ohne weitere Rechnung zu behaupten, daß durch jeden Punkt (a,t) 4 verschiedene charakteristische Kurven hindurchgehen. Unser System ist demzufolge vollständig hyperbolisch. Gemäß der allgemeinen Deutung der charakteristischen Kurven werden sich mögliche Unstetigkeiten in den Ableitungen höchster Ordnung, die in einem Punkt (a,t) als Anfangsbedingung vorgegeben werden, mit Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = V_A$ bzw. V_T entlang einer charakteristischen Kurve ausbreiten.

In den charakteristischen Gleichungen I kommt die Materiegeschwindigkeit nicht vor, wie es sonst in der elementaren Hydrodynamik der Fall ist, wo gilt (vgl. Courant und Friedrichs 1976)

$$\begin{aligned} V_{\text{char}} &= U + V_s, \quad V_s = \text{Schallgeschwindigkeit} \\ U &= \text{Materiegeschwindigkeit} . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Diese Eigenschaft ergibt sich aus der Lagrange-Schreibweise unseres Gleichungssystems: Das Koordinatensystem ist fest an der Materie gebunden, so daß von den charakteristischen Geschwindigkeiten in der Eulerschen Schreibweise nur die Geschwindigkeiten gegenüber der Materie übrig bleiben, V_A und V_T in unserem Fall.

Auch die Schallgeschwindigkeit kommt in I und II nicht vor. Das ist physikalisch verständlich, denn die dünnen magnetischen Flußröhren übertragen bekanntlich keine Schallwellen (s. Defouw 1976, Spruit 1981). Diese Tatsache ist von Bedeutung für die numerische Behandlung der Gleichungen, wie sich im nächsten Kapitel zeigen wird.

Schließlich ergibt sich aus I und II die Notwendigkeit von vier Anfangsbedingungen,

$$x(a,0), \quad z(a,0), \quad u(a,0), \quad v(a,0), \quad (2.50)$$

und zwei Randbedingungen auf jedem Rand der Flußröhre mit fester Lagrange-Koordinate a_0, a_1 . Wir werden in dieser Arbeit stets periodische Randbedingungen bzw., da nur eine halbe Wellenlänge berechnet wird (s. Kap. V), spiegelsymmetrische Randbedingungen annehmen, die u.a. bestimmen, daß sich der Rand frei in vertikaler Richtung aber nicht in horizontaler Richtung bewegen kann und stets horizontal bleiben muß:

$$\begin{aligned} u(a_0, t) &= u(a_1, t) = 0 \\ v(a_0, t) &= v(a_1, t) = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

III. Numerische Behandlung

Eine analytische Lösung des Gleichungssystems (2.28)-(2.34) ist nur unter stark vereinfachenden Annahmen über die Geometrie der Flußröhren, ihren Bewegungszustand oder die Hintergrundsschichtung möglich. Die allgemeine Bewegung der magnetischen Flußröhren in der Konvektionszone muß mit einem numerischen Verfahren berechnet werden. Das in der vorliegenden Arbeit zu diesem Zweck entwickelte Verfahren wird in diesem Kapitel vorgestellt.

Jedes Rechenverfahren für Flußröhren in der Konvektionszone muß folgende mathematische und physikalische Eigenschaften unseres Problems berücksichtigen:

1. Aufgrund der Inhomogenität der Konvektionszone, von deren Boden bis zur Photosphäre sich 11 Dichteskalenhöhen bzw. 17 Druckskalenhöhen erstrecken (Spruit, 1977), ergeben sich Unterschiede von mehreren Größenordnungen in der Zeit- bzw. Längenskala der Vorgänge, die sich in verschiedenen Höhen abspielen. Bei Flußröhren, die sich über die ganze Konvektionszone erstrecken, müssen dennoch die Vorgänge in den verschiedenen Höhen gleichzeitig berechnet werden. Nimmt man als representative Zeitskala z.B. die Laufzeit einer Alfvén-Welle über eine Druckskalenhöhe $\tau = H_p / V_A$, so ergibt sich für das Äquipartitionsmagnetfeld in 1000 km Tiefe $\tau = 350$ sec, aber am Boden der Konvektionszone $\tau = 10^6$ sec. Dieser Unterschied erschwert die Wahl des richtigen Integrationszeitschrittes und kann u.U. die Rechnung untragbar langsam machen.

Da sich andererseits die Flußröhren im Laufe der Zeit über immer mehr Druckskalenhöhen hinweg bewegen, wird jedes feste, anfangs angelegte numerische Gitter allmählich den jeweils bestehenden Längenskalen der physikalischen Größen immer weniger entsprechen. Um jederzeit eine gute numerische Auflösung zu erhalten, muß ein Umschichtungsverfahren oder "Rezoning" eingebaut werden, das die Größe der Gitterzellen den in den verschiedenen Höhen geltenden physikalischen Verhältnissen laufend anpaßt.

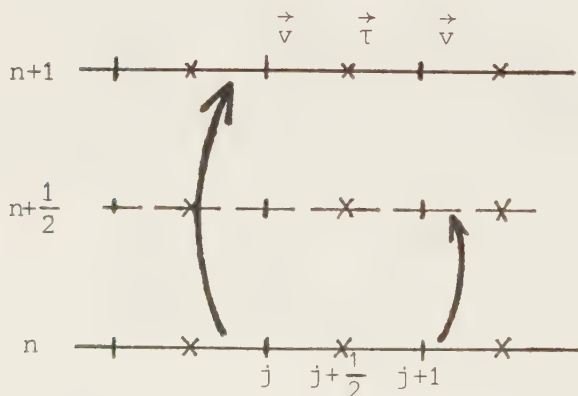
2. Die Nichtlinearität der Gleichungen bringt spezifische numerische Instabilitäten mit sich, die durch die konventionellen Stabilitätsanalysen des numerischen Verfahrens weder vorhersagt noch vermieden werden können

(Richtmeyer und Morton 1967). Die Stabilitätseigenschaften des Rechenverfahrens können dann erst bei Anwendung auf spezifische Probleme beurteilt werden.

3. Die zu berechnenden Vorgänge in den Flußröhren werden oft durch geringe Abweichungen vom Gleichgewicht in Gang gehalten. Ein typisches Beispiel dafür ist die Auftriebskraft, $g \cdot \Delta\rho$. Die relative Dichteänderung $\Delta\rho/\rho_i$ ist bei magnetischem Auftrieb typischerweise $1/\beta = p_{\text{mag}}/p_{\text{gas}}$ (s. Kap. IV), was für ein Feld von 10^4 G am Boden der Konvektionszone den Wert $1/\beta \sim 10^{-7}$ hat! Damit die Rechnung den Rundungsfehlern nicht zum Opfer fällt, muß $\Delta\rho$ numerisch nicht direkt als Differenz von ρ_i und ρ_e sondern gegebenenfalls als Funktion von anderen vorgegebenen kleinen Größen wie z.B. $\Delta S/c_p$ oder $1/\beta$ selbst berechnet werden.

Die Hintergrundschichtung verändert sich am Übergang zwischen der Konvektionszone und dem radiativen Kern radikal. In einer Tiefe $z = 190000 \text{ km}$ ist sie mit $\delta \sim 10^{-8}$ mild überadiabatisch, und schon bei $z = 210000 \text{ km}$ ist sie mit $\delta \sim 9 \cdot 10^{-2}$ stark subadiabatisch (Spruit 1977). Eine in den Kern eindringende Flußröhre erfährt daher heftige Änderungen ihres Bewegungszustandes, wie z.B. eine plötzliche Bremsung ihrer sinkenden Bewegung. Die Berechnung solcher Vorgänge ist kompliziert und erfordert sehr gute Stabilitätseigenschaften des Rechenverfahrens.

Für die numerische Lösung des Gleichungssystems haben wir ein halb-implizites, zweistufiges Differenzenverfahren mit einem versetzten Gitter entwickelt. In verschiedener Hinsicht gleicht dieses einem Lax-Wendroff-Schema (s. z.B. Richtmeyer und Morton 1967 oder Roache 1976). Die eindimensionale Flußröhre wird in Zellen zerlegt; dabei wird der Tangentenvektor $\vec{\tau}$ im Mittelpunkt der Zelle definiert und $\vec{x}$, $\vec{v}$ an deren Rändern;



alle anderen Größen werden als Funktion von z , $\vec{\tau}$, und $\vec{v}$ berechnet - notfalls durch Mittelwertbildung -, wo sie benötigt werden. Alle räumlichen Ableitungen werden durch zentrierte Differenzen ersetzt. Die zeitliche Integration erfolgt in zwei Schritten. Mit den gegebenen Werten von den Variablen zur Zeit t_n (s. Abbildung) berechnet man

zunächst Zwischenschritte aller Größen zur Zeit $t_{n+1/2}$, und zwar durch nichtzentrierte Vorwärtsdifferenzen. Im zweiten Schritt ersetzt man die Zeitableitungen durch zentrierte Differenzen: man errechnet die Größen zur Zeit t_{n+1} anhand von deren Werten zur Zeit t_n und von den Werten der Zeitableitungen zur Zeit $t_{n+1/2}$. Dadurch erreicht das Schema eine Genauigkeit zweiter Ordnung in der Zeit, die auch nicht beeinträchtigt wird, wenn man den Zeitschritt variiert. Diese Eigenschaft ist von Bedeutung für die Integration in Gebieten mit schnellen Änderungen in der Auftriebskraft z.B. in den letzten Skalenhöhen vor der Photosphäre oder in den Schichten unter der Konvektionszone, wo man den Zeitschritt laufend ändern muß.

Das Schema ist auch halbimplizit. Das heißt, die Geschwindigkeit $\vec{v}$ wird zunächst explizit aufgrund ihrer Werte im vorigen Zeitschritt berechnet, abgekürzt:

$$\vec{v}^{n+1/2} = f(\vec{v}^n, \vec{\tau}^n, \vec{x}^n, \frac{\Delta t}{2}) \quad (3.1)$$

$$\vec{v}^{n+1} = g(\vec{v}^n, \vec{\tau}^n, \vec{x}^n, \vec{v}^{n+1/2}, \vec{\tau}^{n+1/2}, \vec{x}^{n+1/2}, \Delta t). \quad (3.2)$$

$\vec{\tau}^{n+1/2}$ (bzw. $\vec{\tau}^{n+1}$) werden nachher mit dem so erhaltenen Wert von $\vec{v}^{n+1/2}$ (bzw. $\vec{v}^{n+1}$), berechnet:

$$\vec{\tau}_{j+1/2}^{n+1} = \vec{\tau}_{j+1/2}^n + \frac{\Delta t}{\Delta a} [\xi \cdot \vec{v}_{j+1}^{n+1} - \vec{v}_j^{n+1}) + \psi \cdot (\vec{v}_{j+1}^n - \vec{v}_j^n)], \quad (3.3)$$

mit ξ und ψ als freien Parametern, $\xi + \psi = 1$, und entweder

$$\vec{\tau}_{j+1/2}^{n+1/2} = \vec{\tau}_{j+1/2}^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta a} [\vec{v}_{j+1}^n - \vec{v}_j^n] \quad (\text{Schema 1}) \quad (3.4a)$$

oder

$$\vec{\tau}_{j+1/2}^{n+1/2} = \vec{\tau}_{j+1/2}^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta a} [\vec{v}_{j+1}^{n+1/2} - \vec{v}_j^{n+1/2}] \quad (\text{Schema 2}). \quad (3.4b)$$

Der Wert von ψ und ξ ist frei wählbar; wir haben

$\xi = \psi = 1/2$ genommen.

Um die Stabilitätseigenschaften dieses Schemas zu untersuchen haben wir eine Von Neumannsche lineare Stabilitätsanalyse von einer vereinfachten Version des Gleichungssystems durchgeführt. Durch die Substitution $p_i = p_i(z, \tau)$ kann man die 4 Gleichungen (2.28)-(2.30) wie folgt umschreiben:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Theta} \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \left(\frac{v_T}{\tau} \right)^2 \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial a} \right] = \text{inhomogene Terme} \\ \vec{N} \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \left(\frac{v_A}{\tau} \right)^2 \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial a} \right] = \text{inhomogene Terme} \\ \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{v}}{\partial a} = 0, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

(3.6)

(3.7)

eine Schreibweise, welche die hyperbolische Struktur des Systems leicht erkennen läßt. Die im Folgenden durchgeführte Analyse bezieht sich auf das System (3.5-3.7) aber linearisiert und ohne inhomogene Terme. Die Stabilität wird also an einem einfachen linearen anisotropen Wellenausbreitungsproblem getestet. Das dadurch gewonnene Kriterium soll lediglich einen Hinweis für das nichtlineare Problem liefern.

Wir betrachten also einen statischen Zustand mit festen, konstanten Werten von v_A und v_T und mit $\left| \begin{array}{l} \vec{\tau} = \vec{\tau}_0 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 \end{array} \right. = 0$ und führen eine kleine Störung dazu, $\left| \begin{array}{l} \vec{v} = (u, v) \\ \vec{\tau} = (\mu, \nu) \end{array} \right.$, ein. In der Von Neumannschen Analyse betrachtet man die Fourier-Komponente mit der Wellenzahl k von dieser Störung zur Zeit t^n ,

$$\begin{pmatrix} u^n \\ v^n \\ \mu^n \\ \nu^n \end{pmatrix} e^{ikx}, \quad (3.8)$$

und es wird nach den Eigenwerten der Verstärkungsmatrix G gefragt, die durch

$$\begin{pmatrix} u^{n+1} \\ v^{n+1} \\ \mu^{n+1} \\ \nu^{n+1} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} u^n \\ v^n \\ \mu^n \\ \nu^n \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

definiert wird, wo $\begin{pmatrix} u^{n+1} \\ v^{n+1} \\ \mu^{n+1} \\ \nu^{n+1} \end{pmatrix}$ die entsprechenden Amplituden der Fourier-Komponente der Störung mit der Wellenzahl k zur Zeit t^{n+1} sind, die aber nun durch die Differenzengleichung gewonnen werden. Wäre der absolute Betrag eines der im allgemeinen komplexen Eigenwerte von G größer als 1, so hieße es, daß unser Schema etwaig auftretende numerische Störungen verstärkt; das Schema wäre dann instabil.

Die Berechnung der Eigenwerte der Matrix G ergibt für das Schema 1:

$$\lambda_{ew} = M \pm \sqrt{M^2 - 1}, \quad (3.10)$$

mit $M = 1 - 2\alpha \left(\frac{\Delta t}{\Delta a}\right)^2 \sin^2 \frac{k\Delta a}{2}$, und

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{v_A^2}{\tau^2} \quad (\lambda_{ew1}, \lambda_{ew2}) \\ \text{oder} \quad \alpha = \frac{v_T^2}{\tau^2} \quad (\lambda_{ew3}, \lambda_{ew4}) \end{array} \right., \quad (3.11)$$

so daß

$$|\lambda_{ew}| = 1 \text{ für alle 4 Eigenwerte} \iff \Delta t \leq \frac{\tau \Delta a}{\max(v_A, v_T)} = \frac{\Delta s}{v_A}, \quad (3.13)$$

wo Δs die Bogenlänge einer Zelle ist und die Tatsache benutzt wurde, daß $v_T \leq v_A$ [s. Def. (2.48)]. Wenn (3.13) nicht erfüllt ist, dann ist $|\lambda_{ew}| > 1$ für mindestens zwei der Eigenwerte. (3.13) ist also eine notwendige Stabilitätsbedingung, die fordert, daß eine Alfvén-Welle im Laufe eines Zeitschrittes keine ganze Zelle Δa zurücklegt. Wenn dies erfüllt ist, dann gilt auch $|\lambda_{ew}| = 1$ für alle Eigenwerte; dies bedeutet keine numerische Diffusion, was ein allgemeines Merkmal der impliziten Schemata ist. Daß dafür (3.13) notwendig ist, ist eine Folge davon, daß unser Schema nur halbimplizit ist, im Gegensatz zu den vollständig impliziten Schemata, wo keine derartige Zeitschritteinschränkung notwendig für die Stabilität ist. Für das Schema 2 ergibt sich statt (3.13) folgendes schwächeres Ergebnis:

$$|\lambda_{ew}| \leq 1 \text{ für alle Eigenwerte} \\ \iff \Delta t \leq \frac{\tau \Delta a}{\max(v_A, v_T)} = \frac{\Delta s}{v_A}, \quad (3.14)$$

und $|\lambda_{ew}|$ wird im allgemeinen < 1 sein. D.h., man hat numerische Diffusion, wie in den normalen expliziten Schemata.

Die Bedingung (3.13) entspricht der gewöhnlichen Courant-Lewi-Friedrichs-Bedingung (s. Richtmeyer und Morton 1967) für das gesamte Gleichungssystem (2.28)-(2.34), die man auch anhand der charakteristischen Geschwindigkeiten (2.44) und (2.45) ableiten könnte. Diese Bedingung hat sich in den eigentlichen Rechnungen mit dem gesamten nichtlinearen System als notwendige Stabilitätsbedingung gut bewährt. Ein Überschreiten der Grenze (3.13) in Testfällen führte zu exponentiell anwachsender numerischer Instabilität, die sich in wenigen Zeitschritten bemerkbar machte.

Die Schallgeschwindigkeit kommt in diesem Stabilitätskriterium nicht vor. Der Grund dafür ist, daß sie keine charakteristische Geschwindigkeit ist (s. II). Ohne diesen Umstand wäre die Anwendung des Rechenverfahrens auf die Lösung unseres Problems unmöglich. Denn bei den in dieser Arbeit betrachteten Feldstärken ist v_A mehrere Größenordnungen kleiner als v_s am Boden der Konvektionszone. Träte v_s statt v_A in (3.13) auf, so müßte Δt auch mehrere Größenordnungen kleiner als die Zeitskala der Entwicklung der Flußröhre sein, die typischerweise von der Ordnung H_p/v_A ist (Kap. IV, V).

Außer durch (3.13) muß die Größe des Integrationszeitschrittes durch weitere Bedingungen eingeschränkt werden:

1. Die einfache Analyse der vorigen Absätze läßt die Schichtung der Konvektionszone unberücksichtigt. Insbesondere muß Δt kleiner sein als der Bruchteil einer typischen Zeitskala für die Schwingungen in horizontalen Flußröhren:

$$\Delta t < \frac{1}{20} \frac{2}{|\omega_{BVM}|}, \quad (3.15)$$

mit ω_{BVM} = Magnetische Brunt-Väisälä-Frequenz. (s. Kap. IV, Abschnitt 4)

2. In Gebieten mit starken Gradienten der Superadiabatizität δ (Def. 4.14) ergeben sich auch schnelle Änderungen der magnetischen Brunt-Väisälä-Frequenz und der Auftriebskräfte. An diesen Stellen mußte Δt durch ein Iterationsverfahren so verkürzt werden, daß sich ω_{BVM} innerhalb eines Zeitschrittes um nicht mehr als einen Faktor 2 ändert.

3. Δt muß auch kleiner sein als ein Bruchteil der charakteristischen Anpassungszeit der Reibungskraft an eine konstante Antriebskraft, Δt_D ,

$$\Delta t < \frac{1}{10} (\Delta t)_D \quad (3.16)$$

(s. IV.1).

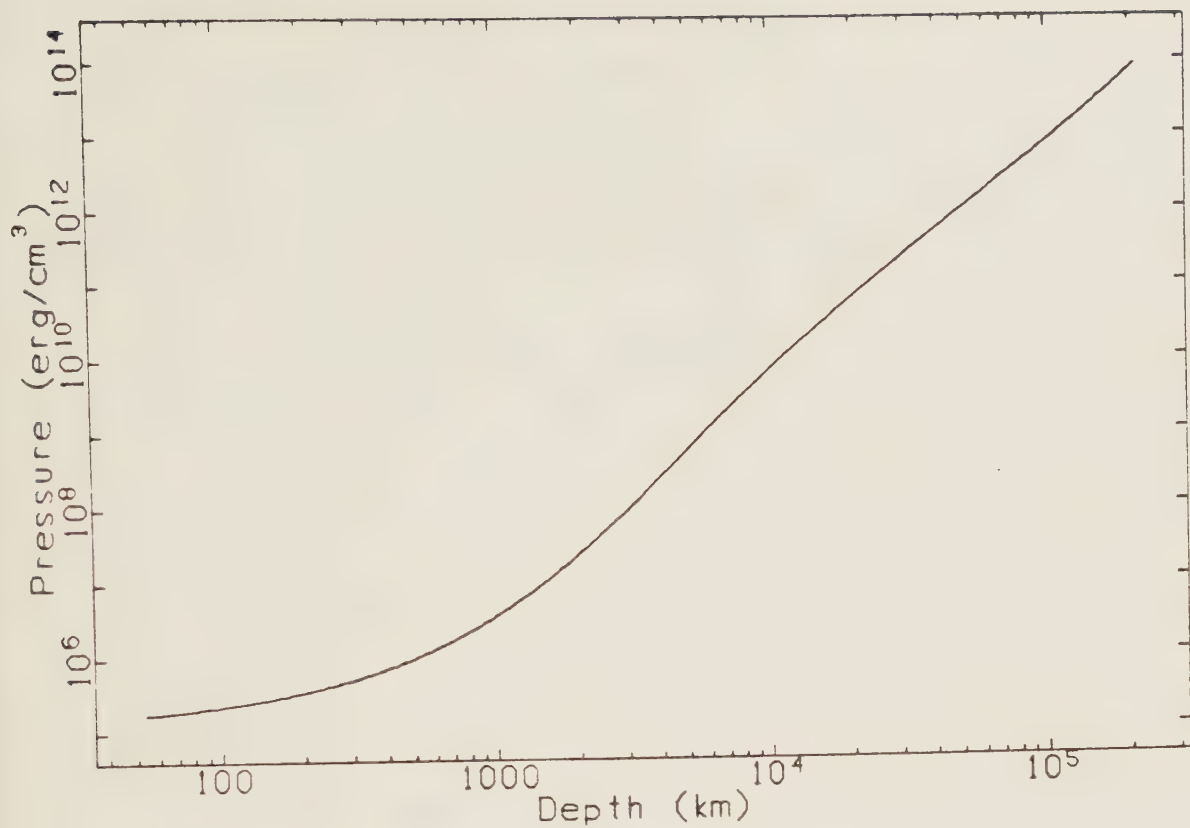
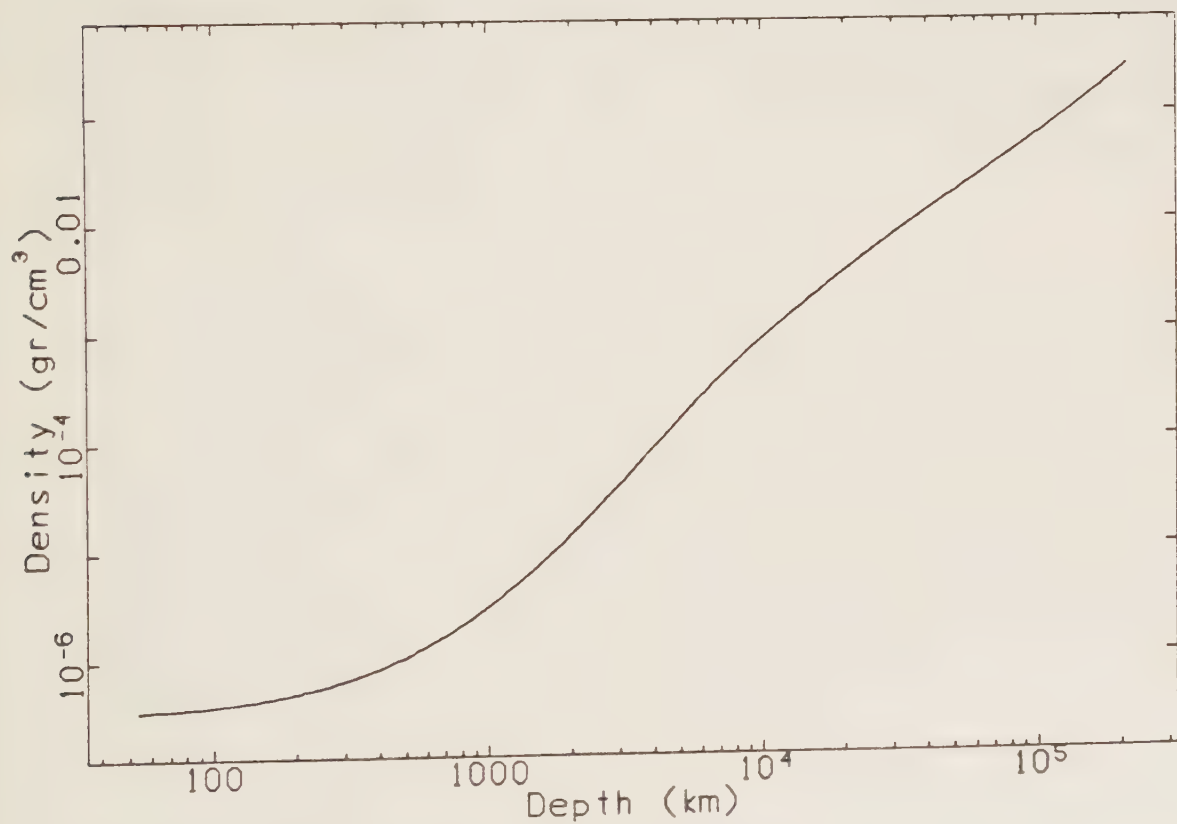


Abb. 3.1 a,b - Druck- und Dichteverteilung in der Konvektionszone nach dem numerischen Modell von H.Spruit (1977).



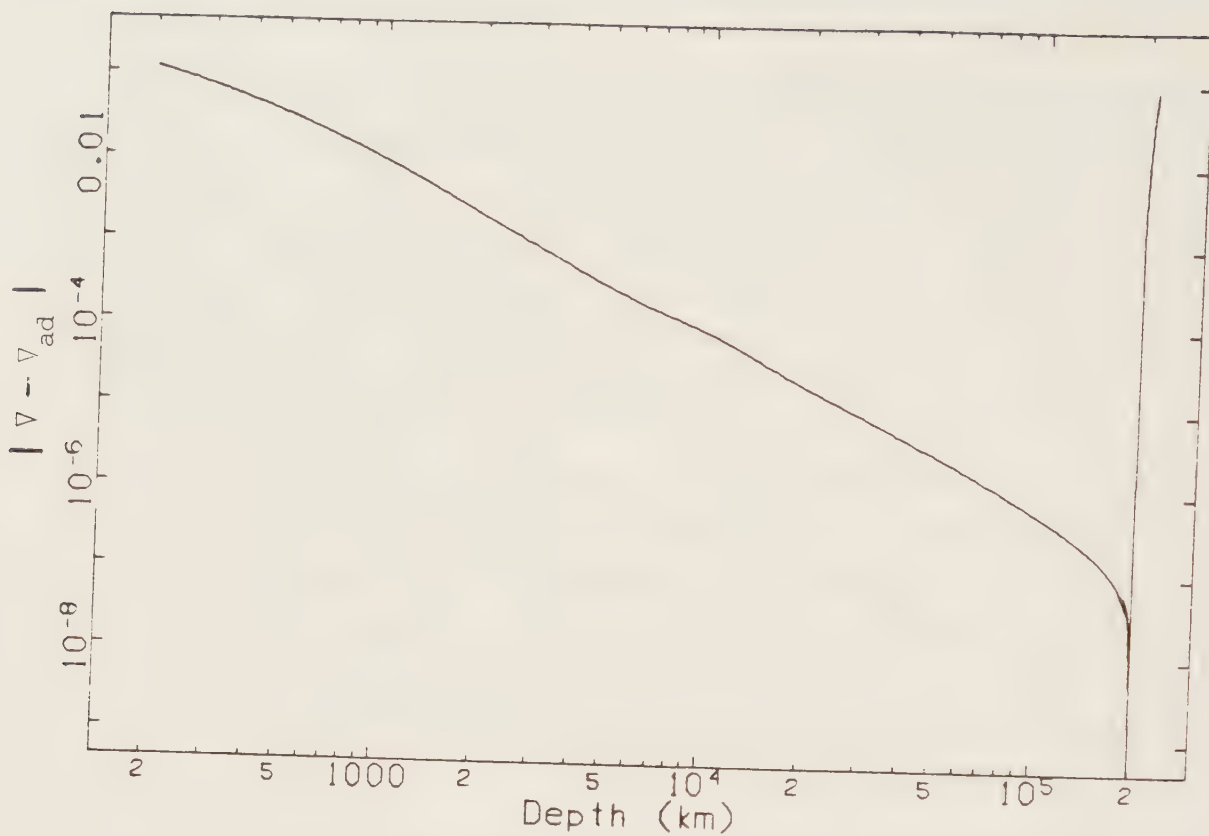


Abb. 3.2: Superadiabatizität, δ , $\delta = \nabla - \nabla_{ad}$, mit $\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P}$, $\nabla_{ad} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{S=\text{const}}$

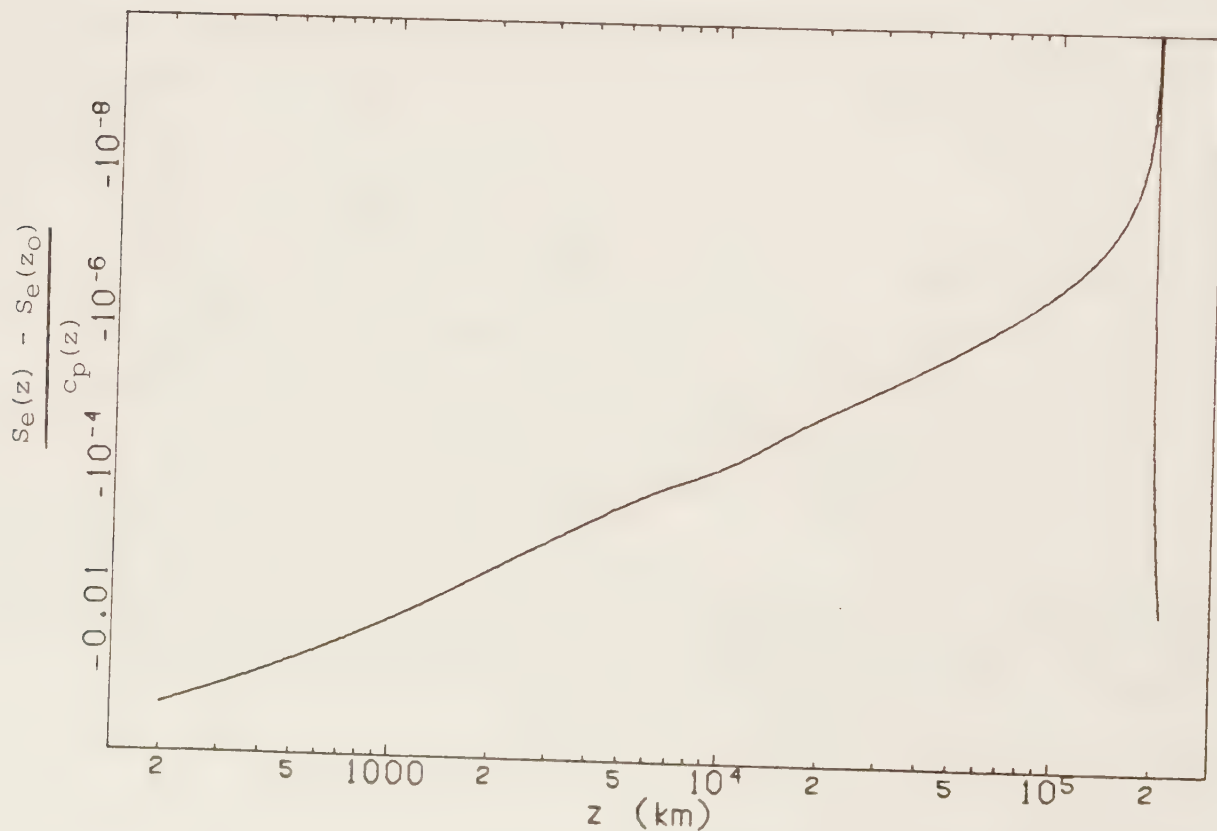


Abb. 3.3: Entropieverteilung bezogen auf ihren Wert am Boden der Konvektionszone, $z_0 = 2 \cdot 10^5$ km

Für die Schichtung der Konvektionszone haben wir das Konvektionszonenmodell von H. Spruit (1977) benutzt. Der Verlauf von Druck, Dichte und Superadiabazität in diesem Modell kann in Abb. (3.1), (3.2) und (3.3) gesehen werden.

Wie oben erwähnt, fordert die Änderung der Dichte und anderer Größen der Flußröhre um mehrere Größenordnungen im Laufe der Rechnung den Einbau eines Umschichtungsverfahrens im numerischen Programm, das die Größe der Zellen Δa den äußerlichen Verhältnissen (Druckskalenhöhe, z.B.) laufend anpaßt. Die Größe der Zellen kann nicht mehr gleichmäßig entlang der Flußröhre sein, sie muß jetzt in Abhängigkeit von der Tiefe z bestimmt werden, und die Differenzen für die Berechnung von Δa sind jetzt nicht mehr zentriert. In dem Verfahren, das zu diesem Zweck entwickelt wurde, rechnet man in jedem Zeitschritt eine Funktion $f(a)$ aus,

$$f(a) = \int_{a_0}^a \frac{\tau da}{H_p} = \int_{s_0}^s \frac{ds}{H_p} \quad (3.17)$$

- der Index Null bezeichnet hier den Rand -; $f(a)$ ist eine gewichtete Länge der Flußröhre und gibt an, wie viele Druckskalenhöhen die Röhrenstrecke (a_0, a) überbrücken würde, falls sie vertikal stünde. Damit eine vernünftige Verteilung der Gitterpunkte in den verschiedenen Höhen zustandekommt, werden die neuen Zellen nach den Werten der Funktion $f(a)$ angelegt.

Das numerische Verfahren ist mehrfach getestet worden. Seine Genauigkeit wurde geprüft am Beispiel der linearen Oszillationen von horizontalen Flußröhren in der Konvektionszone mit endlicher Wellenlänge (s. IV, V), für die eine analytische Lösung vorliegt (Spruit und Van Ballegooijen 1982). Auch die Konvergenz- und Erhaltungseigenschaften des Verfahrens wurden anhand von einfachen Beispielen getestet. Da das Verfahren auf einem Lagrange-Schema basiert, erhält es automatisch die Masse, nicht so jedoch den Impuls und die Energie, so daß ein solcher Test notwendig ist. Bei allen diesen Tests wurde ein hinreichend gutes Verhalten des Verfahrens verzeichnet.

IV. Der Aufstieg von horizontalen magnetischen Flußröhren durch die Konvektionszone.*

Die Frage der Verweilzeit von magnetischem Fluß in der Konvektionszone ist von zentraler Bedeutung für die Theorie des solaren Aktivitätszyklus, denn die Existenz eines oszillatorischen Dynamos erfordert ein Verbleiben der Felder im Gebiet der Verstärkung für Zeiträume von der Ordnung der Dynamoperiode. Man kann in diesem Zusammenhang zunächst den Transport von magnetischem Fluß zur Oberfläche durch horizontale magnetische Flußröhren untersuchen. Aus verschiedenen theoretischen Gründen erwartet man, daß die Flußröhren keinen Ruhezustand in der Konvektionszone erreichen können: Die magnetischen Flußröhren im thermischen Gleichgewicht mit dem äußeren Medium z.B. müssen aufgrund ihres reduzierten inneren Gasdruckes (Gl. 2.33) leichter als ihre Umgebung sein (Parker 1955a). Andererseits kann man auch an Flußröhren denken, die sich in einem Zustand mechanischen Gleichgewichtes befinden. Aus demselben Grund wie im anderen Fall müssen sie etwas kühler als das umgebende Plasma sein, so daß sie, durch Einstrahlung aufgeheizt, leichter als die Umgebung werden müssen (Gurm und Wentzel 1967, Parker 1975). In beiden Fällen muß demnach die Flußröhre einen Auftrieb erfahren; es gilt dann, die Dauer des darauf einsetzenden Aufstiegs durch die Konvektionszone bis zum Verlassen derselben zu bestimmen und dadurch auch Rückschlüsse auf die Möglichkeit der Speicherung von magnetischem Fluß in der Konvektionszone zu gewinnen.

Für den Aufstieg von Flußröhren aus einem Zustand thermischen Gleichgewichtes liegen bereits seit mehreren Jahren einige theoretische Ergebnisse vor: die oben erwähnte Arbeit von Parker (1975) lieferte einen ersten Hinweis dafür, daß alle Flußröhren mit Feldstärken oberhalb 100 G und im permanenten thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung aufgrund ihres magnetischen Auftriebes die Konvektionszone in Zeitskalen durchqueren, die viel kleiner sind als die halbe Sonnenzyklusperiode. In dieser Arbeit wurde angenommen, daß die Röhrenbewegung durch aerodynamischen Widerstand gebremst wird; das ergibt eine Aufstiegsgeschwindigkeit von der Ordnung der Alfvengeschwindigkeit. Demnach müßte die Feldstärke des Magnetfeldes, das am Dynamoprozeß beteiligt ist, viel schwächer sein als der Aquipartitionswert am Boden der Konvektionszone von der Ordnung 10^4 G.

*Die Ergebnisse dieses Kapitels sind in der Zeitschrift Astronomy and Astrophysics veröffentlicht worden (Moreno-Insertis 1983).

Die Rechnungen von Parker basierten auf stark vereinfachenden Annahmen. In den darauf folgenden Jahren wurde dieselbe Art von Rechnung mit feineren Modellen wiederholt (Schüßler, 1977; Unno und Ribes, 1976; Kuznetsov und Syrovatskii, 1979; Parker, 1979). Schüßler z.B. berücksichtigte die wirkliche Schichtung der Konvektionszone statt eines homogenen Mediums; die Flußröhre muß dann während des Aufstiegs expandieren und dadurch an Auftrieb verlieren. In allen diesen Arbeiten wurde auch die Wirkung der Turbulenz im äußeren Medium auf die Bewegung der Flußröhre mit berücksichtigt, indem verschiedene Formeln für den turbulenten viskosen Widerstand verwendet wurden (vgl. II.2). Die so erhaltenen Aufstiegszeiten waren viel länger als mit aerodynamischem Widerstand allein.

In den zitierten Arbeiten wurden verschiedene Näherungen angewandt, damit das Problem einer analytischen Lösung zugänglich bzw. mit einfachen numerischen Mitteln lösbar wurde. Einige dieser Näherungen sind nicht bzw. nicht immer gerechtfertigt. Die Annahme des ständigen thermischen Gleichgewichtes muß z.B. nachgeprüft werden. Die Zeitskala des thermischen Austausches mit der Umgebung ist nämlich sehr langsam verglichen mit der Aufstiegsdauer (IV.3). Der Aufstieg muß demzufolge eher adiabatisch als isotherm verlaufen. Bei einem adiabatischen Aufstieg spielt die überadiabatische Schichtung der Konvektionszone eine wichtige Rolle (IV.1). Kuznetsov und Syrovatskii rechneten zwar den adiabatischen Aufstieg von Flußröhren, diese waren aber in einem adiabatisch geschichteten Medium; der Effekt des konvektiven Auftriebs konnte deswegen in dieser Arbeit nicht zum Vorschein kommen. Außer dem permanenten thermischen Gleichgewicht bzw. in anderen Fällen einer Vereinfachung der Hintergrundschichtung wurde auch eine instantane Anpassung der Reibungskräfte an die Antriebskräfte vorausgesetzt. Auch diese Annahme ist nicht immer gerechtfertigt (IV.1).

Weiter muß der Aufstieg von Flußröhren, die sich anfänglich im mechanischen Gleichgewicht befinden, erforscht werden. Bisherige Rechnungen in dieser Hinsicht hatten sich auf den quasistatischen Aufstieg von Flußröhren in einem stabil geschichteten Medium beschränkt (Gurm und Wentzel, 1967; Kippenhahn und Möllenhof, 1975; Parker, 1975). In einem überadiabatisch geschichteten Medium sind darüber hinaus für sehr dünne Flußröhren oder für Flußröhren mit schwachem Feld Zeitskalen für den Aufstieg zu erwarten, die viel kürzer als die thermische Zeitskala des quasistatischen Aufstiegs sind.

Mit Hilfe des in III beschriebenen numerischen Rechenverfahrens wird in diesem Kapitel die Untersuchung des Aufstiegs der horizontalen Flußröhren um einige weitere Fälle-erweitert, ohne die ein endgültiges Urteil über die Verweilzeit der Flußröhren in der Konvektionszone nicht möglich ist; dabei werden einige der Vereinfachungen früherer Arbeiten nicht mehr benutzt.

In all diesen Fällen kann das physikalische Grundverhalten aufgrund von analytischen Überlegungen verstanden werden, die in den Abschnitten des Kapitels den numerischen Ergebnissen jeweils vorangeschickt werden. In IV.1 wird ein reduziertes Gleichungssystem für den Aufstieg von horizontalen Flußröhren aus (2.28)-(2.34) abgeleitet. Einige Terme in der Bewegungsgleichung werden kurz erläutert; das Verständnis der physikalischen Quellen des Auftriebs ist Voraussetzung für eine richtige Deutung der Ergebnisse dieses Kapitels. Deshalb wird auch in IV.1 der Auftriebsterm untersucht. Darauf folgt eine Erörterung der Rolle des Trägheitstermes in der Entwicklung der Flußröhre.

IV.2 behandelt den Aufstieg von Flußröhren, die anfänglich im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung sind. Die zwei extremen Fälle, nämlich ständiges thermisches Gleichgewicht bzw. völlige termische Isolierung werden berechnet und miteinander verglichen. Der thermische Austausch ist ein wichtiger Faktor für die Bestimmung der Aufstiegszeit. Er wird deswegen in IV.3 im Detail untersucht. Die Stabilität von Flußröhren, die sich anfänglich im mechanischen Gleichgewicht befinden, ist in IV.4 behandelt, wo auch ihr Aufstieg, der durch die kombinierte Wirkung von Einstrahlung und Auftrieb erfolgt, berechnet wird.

1. Reduziertes Gleichungssystem

Der Auftriebsterm: Magnetischer und konvektiver Auftrieb.

Der Trägheitsterm.

Das Gleichungssystem (2.28)-(2.34) reduziert sich im Fall von geradlinigen, horizontalen Flußröhren auf ein einfacheres System. Vorausgesetzt, daß keine horizontalen Bewegungen stattfinden ($\vec{v} \cdot \vec{B} = 0$), entfällt zunächst Gl. (2.29). Die restlichen Gleichungen nehmen folgende Gestalt an:

$$\text{Bewegungsgleichung: } \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta \rho}{\rho_i} g + \frac{F_D^L}{\rho_i A} \quad (4.1)$$

$$\text{Kontinuitäts- mit Induktionsgleichung: } \frac{B}{\rho_i} = \text{const.} \quad (4.2)$$

In diesem Abschnitt und in IV.2 werden wir zwei Grenzfälle der thermischen Wechselwirkung zwischen der Flußröhre und ihrer Umgebung parallel behandeln: wir werden einerseits thermisch isolierte, andererseits thermisch an die Umgebung vollständig gekoppelte ($T_i = T_e$) Flußröhren berücksichtigen. Gleichung (2.31) kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$S_i(p, \rho) = \text{const} \quad (4.3a)$$

$$\text{bzw. } T_i(z) = T_e(z). \quad (4.3b)$$

Später (IV.3, IV.4) wird die allgemeine Energiegleichung (2.31) benutzt,

$$\rho_i T_i \frac{dS_i}{dt} = Q. \quad (4.3c)$$

Die Gleichungen (2.32)-(2.34) bleiben unverändert.

Wenden wir uns jetzt dem Auftriebsterm, $\frac{\Delta \rho}{\rho} g$, zu. Der Einfachheit halber werden in der folgenden einleitenden Überlegung Ionisationsprozesse nicht berücksichtigt und die spezifischen Wärmen konstant angenommen. Dann gilt folgende thermodynamische Beziehung:

$$dS = c_p \left(\frac{1}{\gamma} d \ln p - d \ln p \right), \quad (4.4)$$

$$\text{mit } \gamma = c_p / c_v. \quad (4.5)$$

Mit Hilfe von 4.4 und 2.33 kann man $\Delta p = p_i - p_e$ als Funktion von $\Delta S \stackrel{\text{def}}{=} S_i - S_e$ und $\beta \stackrel{\text{def}}{=} p_i / p_m$ schreiben,

$$\frac{\Delta p}{p_i} = 1 - \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)^{1/\gamma} \exp \left(\frac{\Delta S}{c_p} \right). \quad (4.6)$$

Den Charakter und die Bedeutung der verschiedenen Auftriebsquellen kann man durch folgenden angenäherten Ausdruck für (4.6) illustrieren:

$1/\beta \ll 1$ gilt in der ganzen Konvektionszone mit Ausnahme der obersten Schichten oder bei unrealistisch hohen Feldstärken. Zum Beispiel,

$$1/\beta \leq 5 \cdot 10^{-3} \quad \text{bei } z = 10^5 \text{ km für } B \leq 10^6 \text{ G,}$$

$$1/\beta = 5 \cdot 10^{-9} \quad \text{für } B = 1000 \text{ G in derselben Tiefe.}$$

Bei allen Flußröhren, die aus einem Zustand thermischen oder mechanischen Gleichgewichtes vom Boden der Konvektionszone aufsteigen, gilt wegen der quasiadiabatischen Schichtung eines großen Teils der Konvektionszone $\Delta S / c_p \ll 1$. Man kann dann (4.6) in sehr guter Näherung schreiben

$$\frac{\Delta p}{p_i} \approx - \frac{1}{\gamma \beta} - \frac{\Delta S}{c_p}. \quad (4.7)$$

Um (4.6) weiter zu entwickeln braucht man eine Energiegleichung. Um zu zeigen, daß die Wahl der Energiegleichung die Aufstiegsrate der Flußröhren wesentlich beeinflusst, betrachten wir, wie gesagt, die zwei entgegengesetzten Fälle der thermisch isolierten Flußröhren bzw. der Flußröhren, die im ständigen thermischen Gleichgewicht mit ihrer Umgebung aufsteigen. Als Anfangsbedingung werde in beiden Fällen $T_{io} = T_{eo}$ angenommen; andere Anfangsbedingungen werden in IV.4 untersucht.

Bei isentropischer Bewegung kann man ΔS in 4.7 wie folgt ausdrücken:

$$\Delta S = (S_{io} - S_{eo}) - \Delta S_e; \quad (4.8)$$

dabei sind S_{i0} und S_{e0} die anfänglichen Werte der Entropie im Inneren bzw. außerhalb der Flußröhre und $\Delta S_e = S_e(z) - S_{e0}$. Mit $T_{i0} = T_{e0}$ ergibt sich dann

$$\frac{\Delta p}{\rho_i} = -\frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\gamma} + \nabla_{ad} \frac{\beta}{\beta_0} \right] + \frac{\Delta S_e}{c_p} , \quad (4.9)$$

$$\text{mit } \nabla = \frac{d \ln T}{d \ln p} \text{ und } \nabla_{ad} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln p} \right)_{S = \text{const.}} \quad (4.10)$$

Der entsprechende einfache Ausdruck für Röhren im permanenten thermischen Gleichgewicht ist

$$\frac{\Delta p}{\rho_i} = -\frac{1}{\beta} . \quad (4.11)$$

In (4.9) ergibt sich $\Delta p/\rho_i$ als Summe von zwei Termen: der erste ist vom Magnetfeld verursacht; die entsprechende Auftriebskraft kann man magnetischen Auftrieb nennen. Der zweite dagegen ist nur von der Hintergrundsschichtung abhängig; die entsprechende Auftriebskraft benennen wir konvektiven Auftrieb. Im Gegensatz dazu kommt in (4.11) nur ein magnetischer Beitrag vor, $-1/\beta$.

Die magnetischen Beiträge zu (4.9) und (4.11) sind von gleicher Größenordnung. Dadurch, daß $\frac{\Delta p}{\rho_i} \ll 1$ und $\frac{1}{\beta} \ll 1$, ist

$$\beta/\beta_0 \approx \frac{p_e}{p_{e0}} \cdot \left(\frac{\rho_{e0}}{\rho_e} \right)^2 , \quad (4.12)$$

so daß das Verhältnis β/β_0 nur Werte zwischen 1 und 8 annehmen kann (s. Abb. 5.13), wenn die Flußröhre sich zwischen dem Boden der Konvektionszone und einer Tiefe von 10000 km bewegt. Die magnetischen Terme in (4.9) und (4.11) können sich dann um höchstens einen Faktor 4 unterscheiden, in der Tat werden sie praktisch gleich bleiben in einem großen Teil der Konvektionszone. Der Hauptunterschied zwischen beiden Ausdrücken besteht im Vorkommen des konvektiven Termes, $\Delta S/c_p$, in (4.9), der in (4.11) fehlt und wegen der nichtadiabatischen Schichtung der Konvektionszone verschieden von Null ist. Welcher von beiden Termen in (4.9) dominiert, wird von der Feldstärke festgesetzt: der konvektive Term wird bei schwachen Feldern den Aufstieg vollständig bestimmen, der magnetische Term bei starken Feldern. Um diese Aussagen quantitativ zu erhärten, kann man folgenden thermodynamischen Ausdruck benutzen:

$$\frac{dSe}{dz} = c_p \delta \frac{d \ln P}{dz}, \quad (4.13)$$

$$\text{mit } \delta = \nabla - \nabla_a, \quad (4.14)$$

$$\text{oder auch } \frac{\Delta Se}{c_p} = \delta_o \int_{z_o}^z f(\bar{z}) \frac{d\bar{z}}{H_p(\bar{z})}, \quad (4.15)$$

$$\text{wobei } f(\bar{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta(\bar{z})}{\delta_o} \frac{c_p(\bar{z})}{c_p(z)} \quad \text{und } H_p = \text{Druckskalenhöhe}, \quad (4.16)$$

Das Integral auf der rechten Seite hängt allein von z_o , z und der äußeren Schichtung ab, nicht aber von den physikalischen Parametern der Flußröhre. Wenn $z_o = 1.9 \cdot 10^5 \text{ km}$ - Boden der Konvektionszone -, wächst es von 0 bei $z = z_o$ auf 1000 bei $z = 15000 \text{ km}$. Das Verhältnis des konvektiven Auftriebs zum magnetischen Auftrieb wird demnach vom Parameter $\beta_o \delta_o$ bestimmt:

$$\frac{\frac{\Delta Se}{c_p}}{\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\gamma} + \nabla_a \frac{\beta}{\beta_o} \right)} = \beta_o \delta_o \frac{\int_{z_o}^z f(\bar{z}) \frac{d\bar{z}}{H_p(\bar{z})}}{\nabla_a \left(1 + \frac{1}{\gamma-1} \frac{\beta_o}{\beta} \right)}. \quad (4.17)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite, mit dem $\beta_o \delta_o$ multipliziert wird, ist in erster Näherung wieder nur von der äußeren Schichtung abhängig und wächst monoton von 0 bei $z = z_o = 1.9 \cdot 10^5 \text{ km}$ auf $2.1 \cdot 10^3$ bei $z = 15000 \text{ km}$. Für alle $\beta_o \delta_o \gtrsim 10^{-3}$ gibt es deshalb eine Tiefe $z_c(B_o)$, wo das Verhältnis (4.17) größer als 1 wird. Mit (4.15), (4.9) und $z_o = 1.9 \cdot 10^5 \text{ km}$ kann man folgende Werte für z_c ausrechnen:

B_o (Gauß)	$\beta_o \delta_o$	z_c (km)
10^5	7.2×10^{-3}	$4.4 \cdot 10^4$
10^4	7.2×10^{-1}	$1.55 \cdot 10^5$
10^3	7.2×10^1	$1.89 \cdot 10^5$

In ihrer Anfangsposition, z_o , besitzt die Flußröhre nur magnetischen Auftrieb, so daß das Verhältnis (4.17) für $z = z_o$ verschwindet. $\left| \frac{\Delta Se}{c_p} \right|$ wächst dann aber mit der Höhe sehr schnell an im Vergleich zum magnetischen Auftrieb. Der magnetische Auftrieb wird infolgedessen sehr klein gegenüber

dem konvektiven sobald das Niveau z_c überschritten ist. Bei schwachen Feldern, etwa bei $\beta_0 \delta_0 \gtrsim 10^{-2}$ oder $B \lesssim 10^4 \text{ G}$ für $z_0 = 1.9 \cdot 10^5 \text{ km}$, liegt z_c sehr nahe an z_0 . Der magnetische Auftrieb muß in diesem Fall nur den anfänglichen Schub bis zum Niveau z_c liefern. Danach wird der Flußröhrenaufstieg allein vom konvektiven Auftrieb bestimmt, daher unabhängig vom Magnetfeld, und ähnlich dem Aufstieg eines unmagnetisierten Plasmaballes in einem überadiabatisch geschichteten Medium.

In früheren Arbeiten über in der Konvektionszone aufsteigende magnetische Flußröhren hatte man, wie oben bemerkt, angenommen, daß der Trägheitsterm in Gleichung 4.1 vernachlässigbar klein im Vergleich zu den anderen Termen ist. Dies ist eine gute Näherung, wenn die Auftriebskraft und der Röhrenquerschnitt während des Aufstiegs konstant bleiben: die Geschwindigkeit wird dann nämlich so wachsen oder abnehmen, daß nach kurzer Zeit Auftriebs- und Widerstandskraft einander kompensieren. In unserem Fall liegen aber weder Gleichmäßigkeit der Schichtung noch zeitlich konstante physikalische Größen in der Flußröhre vor. Diese Näherung muß also nachgeprüft werden.

Wir untersuchen nur den Fall des aerodynamischen Widerstandes als Beispiel. Sei also F_D^L durch (2.35) mit $C_D = 1$ ersetzt. Die reduzierte Bewegungsgleichung ist dann von der Form

$$\frac{dw}{dt} = b - kw|w|, \quad b > 0, \quad k > 0, \quad (4.18)$$

wo w die Geschwindigkeit darstellt. Für b und k konstant und $w > 0$ lautet die Lösung

$$w = (b/k)^{1/2} \tanh [(t-t_0) \cdot \sqrt{bk} + \text{const}], \quad (4.19)$$

woraus folgt

$$\left. \begin{array}{l} w \rightarrow w_\infty \stackrel{\text{def}}{=} (b/k)^{1/2} \\ \text{und} \\ \frac{dw}{dt} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ für } t \rightarrow \infty. \quad (4.20)$$

Nun ist $(b/k)^{1/2}$ nicht konstant sondern eine gewisse Funktion von z ; sei H_* deren typische Längenskala,

$$H_* \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d \ln(b/k)^{1/2}}{dz} \right)^{-1}.$$

Die Annahme $|\dot{w}/\dot{t}| \ll b \approx kw^2$ kann nur konsistent sein, wenn

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{b}{k} \right)^{1/2} \cdot w_{\infty} \ll b \approx kw_{\infty}^2, \quad (4.21)$$

woraus folgt

$$H_{\star} \gg \frac{1}{k} \quad (4.22)$$

oder, mit (2.35),

$$\pi \cdot r \ll H_{\star}. \quad (4.23)$$

Interessanterweise trifft man hier wieder auf die Bedingung, daß der Radius der Flußröhre klein sein muß gegenüber einer typischen Längenskala. (4.21) bis (4.23) können auch als die Bedingung dafür umgedeutet werden, daß die Flußröhre während der charakteristischen Zeitskala für das Erreichen des asymptotischen Regimes (4.20) nur einen kleinen Bruchteil von $H_{\star}$ zurücklegt.

Nun, im Falle des isothermen Aufstiegs ist der Auftrieb rein magnetisch (4.11). Mit einem ähnlichen Näherungsverfahren wie dort kann man jetzt $H_{\star}$ wie folgt abschätzen:

$$H_{\star} \sim \left| \frac{4}{1 - 3 \nabla_{ad}} \right| H_p \sim 20 H_p, \quad (4.24)$$

so daß, wenn $r < H_p$, die Kräftegleichheit $|\text{Auftrieb}| = |\text{Widerstand}|$ eine sehr gute Näherung abgibt.

Im Falle des adiabatischen Aufstiegs ist aber die instabile äußere Schichtung von Wichtigkeit, und $H_{\star}$ wird, wenn das Magnetfeld schwach ist, von ihr allein bestimmt. Es ist dann

$$\left| \frac{\Delta \rho}{\rho} \right| \sim \left| \frac{\Delta S_e}{c_p} \right|$$

für einen großen Teil des Aufstiegs und damit $H_{\star} \lesssim H_p$. (4.23) ist dann viel restriktiver, so daß bei Flußröhren mit großen Querschnitten, $r \approx H_p$, Abweichungen vom Gleichgewicht zwischen Widerstand und Auftriebskraft erwartet werden müssen; der Trägheitsterm muß also berücksichtigt werden.

2. Der Aufstieg von Flußröhren aus dem thermischen Gleichgewicht

Abb. (4.1a) und (4.2) zeigen die numerische Lösung des reduzierten Systems (4.1)-(4.3), (2.32)-(2.34) für die Anfangsbedingung $T_{io} = T_{eo}$ und $z_o = 190000$ km. Im numerischen Konvektionszonenmodell von H. Spruit (1977) befindet sich der Übergang zwischen Konvektionszone und radiativem Kern in einer Tiefe von 198000 km; z_o liegt also nur den Bruchteil einer Druckskalenhöhe, $H_p(z_o) = 55000$ km, darüber.

In den Abbildungen ist die Aufstiegszeit τ_A zwischen z_o und einem Niveau $z = 10000$ km unter der Photosphäre in Abhängigkeit von der anfänglichen Feldstärke dargestellt. Die numerische Lösung ist hier für die Grenzfälle ständigen thermischen Gleichgewichts mit der Umgebung (obere gestrichelte Kurven) bzw. thermischer Isolierung (untere Gruppe durchgezogener Kurven) durchgeführt.

Der Unterschied zwischen Abb. 4.1a,b und 4.2 liegt nur an der benutzten Formel für den Widerstandsterm (vgl. II.2): In den in Abb. 4.1a,b dargestellten Rechnungen wurde für F_D^L die aerodynamische Widerstandsformel (2.35 mit $C_D = 1$) allein, d.h. ohne turbulente Reibung, eingesetzt. Erst in den Rechnungen von Abb. 4.2 wurde der Ausdruck mit turbulenter Reibung mit einbezogen.

In der Abb. 4.1a wurden für beide isotherme und adiabatische Rechnungen drei verschiedene Anfangsquerschnitte gewählt:

$$\begin{aligned} r_o &= 10^{-1} H_{po} && \text{(die jew. untere Kurve jeder Schar)} \\ r_o &= 10^{-1.5} H_{po} && \text{(die jew. mittlere Kurve jeder Schar)} \\ r_o &= 10^{-2} H_{po} && \text{(die jew. obere Kurve jeder Schar),} \end{aligned}$$

wobei r_o der Querschnittsradius und H_{po} die Druckskalenhöhe beide am Anfangsniveau z_o darstellen. Die unterste, gestrichelte Kurve ist das Ergebnis von adiabatischen Rechnungen, wo der Widerstandsterm F_D^L gleich 0 gesetzt wurde; die Aufstiegszeiten sind dann querschnittsunabhängig. Mehrere der im vorigen Abschnitt erörterten physikalischen Effekte kann man an diesem Bild erkennen:

Für große Anfangsfeldstärken, $B_0 \rightarrow \infty$, streben die adiabatischen Kurven gegen die entsprechenden isothermen mit demselben Anfangsquerschnitt; der magnetische Auftrieb ist in diesem Limes vorherrschend, so daß die isothermen und adiabatischen Aufstiegszeitskalen einander sehr nahe kommen. Die kleinere Verschiebung zwischen den entsprechenden Kurven von beiden Scharen kommt dadurch zustande, daß der adiabatische magnetische Auftrieb in allen Höhen stets etwas größer als der isotherme ist (siehe (4.9), (4.11)).

Im Gegensatz dazu trennen sich beide Kurvensätze für kleine Anfangsfeldstärken, $B_0 \rightarrow 0$, deutlich voneinander. Die isothermen Serien ergeben gerade Linien, was in Einklang mit dem Potenzgesetz $\tau_A \sim 1/B$ steht, das man aus (4.1) unter Vernachlässigung des Trägheitstermes und bei festem r_0 ableiten kann. Sie erreichen Werte von $\gtrsim 11$ Jahren für $B_0 \lesssim 700$ Gauß und $r_0 = 10^{-2} H_{po}$, bzw. für $B_0 \lesssim 235$ G und $r_0 = 10^{-1} H_{po}$. Diese Ergebnisse stimmen mit denen von Schüßler (1977) für aerodynamischen Widerstand überein, sowie, größenordnungsmäßig, mit denen von Parker (1975). Dies war zu erwarten, da der Trägheitsterm in diesem Fall des ständigen thermischen Gleichgewichtes und für die benutzten Querschnittswerte sehr klein im Vergleich zu den anderen Termen in (4.1) sein muß.

Die adiabatischen Kurven liegen weit unterhalb der isothermen. Die Annahme der thermischen Isolierung bewirkt eine drastische Verkürzung der Aufstiegszeiten im Bereich schwacher Felder: hier dominiert der konvektive Auftrieb; infolgedessen streben die Aufstiegszeiten gegen einen asymptotischen Wert, der von der Anfangsfeldstärke unabhängig und viel kleiner als der durch magnetischen Auftrieb allein erhaltene ist. Darüber hinaus erwartet man im Fall schwacher Felder und adiabatischer Entwicklung, wie oben in IV.1 ausgeführt, daß der Trägheitsterm nicht mehr verschwindend klein im Vergleich zu den anderen Kräften sein wird (s.a. Abb. 4.1c), so daß die Aufstiegszeiten für $B_0 \rightarrow 0$ immer schwächer vom Anfangsquerschnitt abhängen. An der Abbildung sieht man tatsächlich, daß die Werte der drei unteren Kurven im Bereich schwacher Felder nicht mehr dem Potenzgesetz

$$\tau_A \propto r_0^{-1/2} \text{ für } B_0 = \text{const.}$$

folgen, das aus (4.1) mit $\frac{dv}{dt} = 0$ abgeleitet werden kann; für $B_0 \rightarrow 0$ nähern sich alle drei Kurven der untersten, reibungsfreien Kurve. Bei festem $B_0 = 100$ G beträgt τ_A 278 Tage für $r_0 = 10^{-2} H_{po}$, 182 Tage für $r_0 = 10^{-1} H_{po}$ und 163 Tage für $F_D^L = 0$.

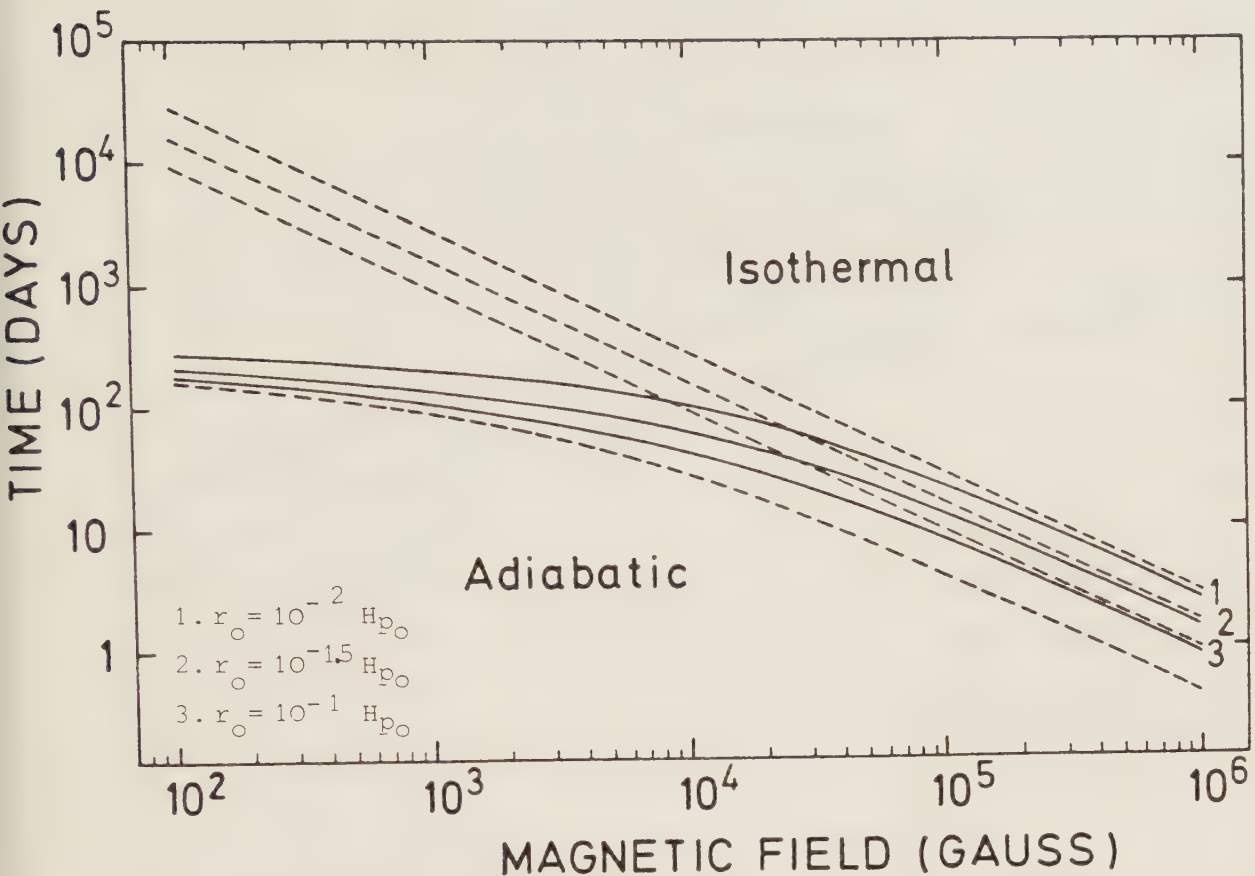


Abb. 4.1a - Aufstiegszeiten horizontaler Flußröhren, deren Bewegung durch aerodynamischen Widerstand gebremst wird, geordnet nach dem Anfangsquerschnitt der Röhre. Die gestrichelten Kurven entsprechen dem Aufstieg von Flußröhren im ständigen thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung, die durchgezogenen Kurven dem adiabatischen Aufstieg. Die unterste, gestrichelte Kurve entspricht einem widerstandsfreien Aufstieg.

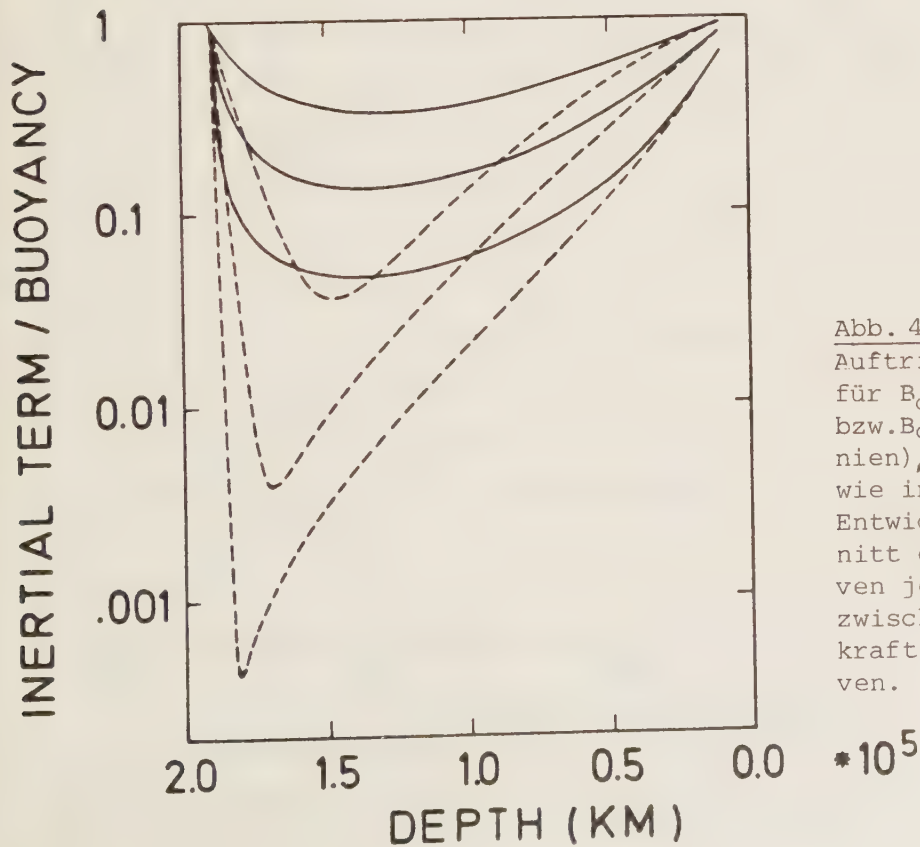


Abb. 4.1c - Verhältnis Trägheit zu Auftrieb, $|\rho \cdot dv/dt| / |g \cdot \Delta \rho|$, für $B_o = 10^3$ G (durchgezogene Linien) bzw. $B_o = 4.6 \cdot 10^4$ G (gestrichelte Linien), dieselben Anfangsradien wie in Abb. 4.1a und adiabatische Entwicklung. Dem kleinsten Querschnitt entsprechen die untersten Kurven jeder Schar (maximale Kopplung zwischen Widerstands- und Auftriebskraft), dem größten die obersten Kurven.

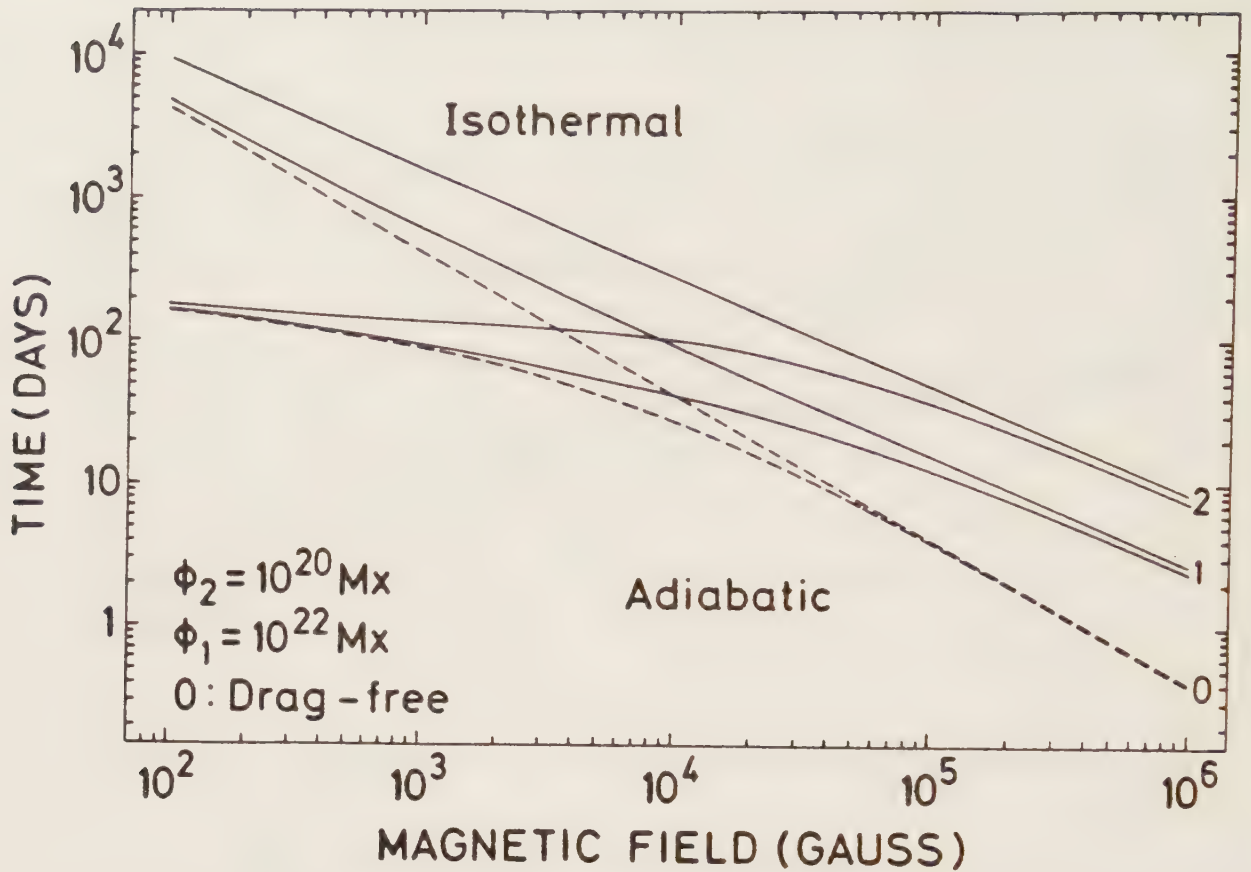


Abb. 4.1b - Die Ergebnisse von Abb. 4.1a werden hier nach dem magnetischen Fluß der Röhre geordnet. Durchgezogene Linien: Aufstieg im ständigen thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung (zwei obere Kurven) bzw. adiabatischer Aufstieg (zwei untere Kurven). Gestrichelte Linien: der entsprechende widerstandsfreie Aufstieg.

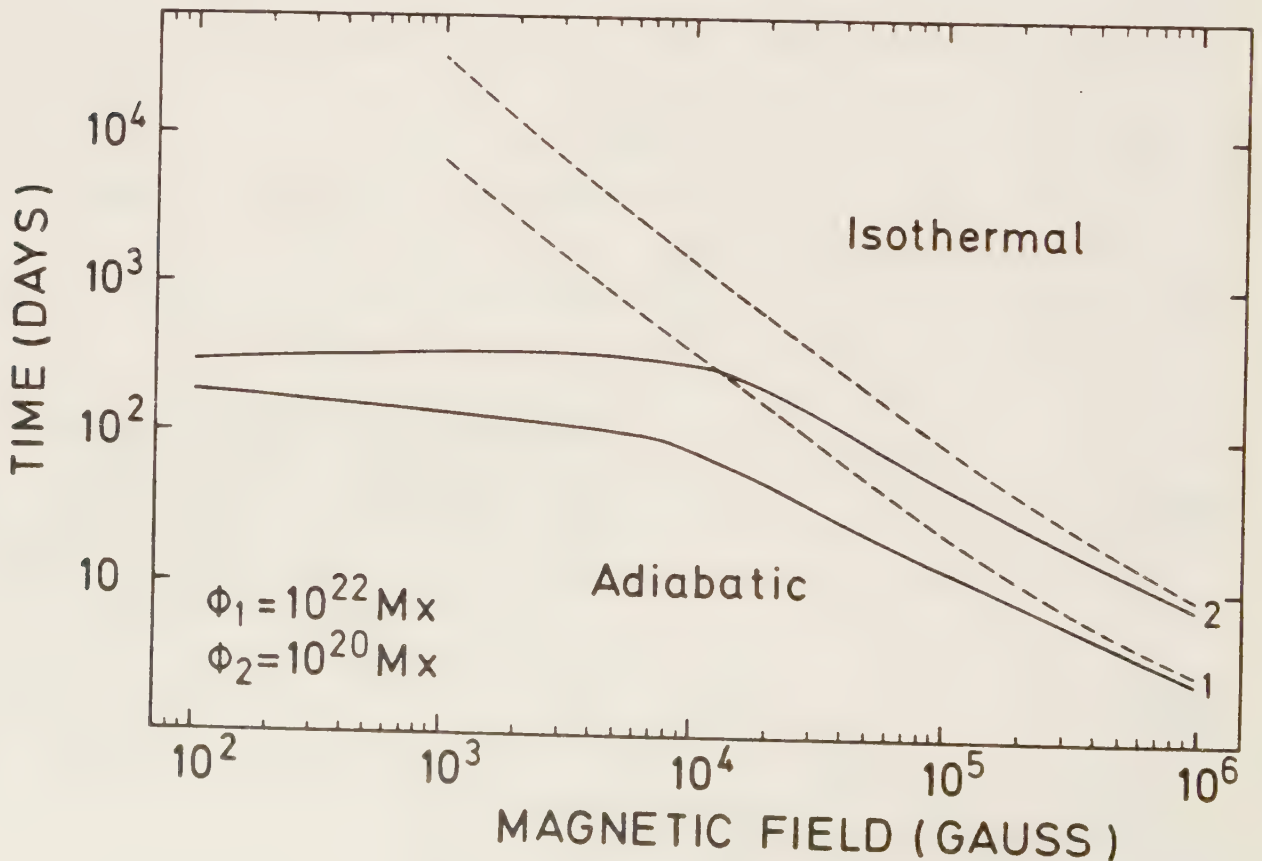


Abb. 4.2 - Dauer des durch turbulenten Widerstand gebremsten Aufstiegs. Gestrichelte Kurven: Aufstieg im ständigen thermischen Gleichgewicht. Durchgezogene Kurven: adiabatischer Aufstieg.

Um den Vergleich mit den in den aktiven Gebieten auftretenden Flußröhren zu erleichtern, haben wir in Abb.4.1b die Ergebnisse der Rechnungen von Abb. 4.1a in Kurven konstanten magnetischen Flusses eingeordnet. Es wurden zwei Flußwerte ausgewählt, und zwar 10^{22} Mx bzw. 10^{20} Mx, die dem Fluß eines großen Sonnenfleckes bzw. eines kleinen Fleckes oder einer Pore entsprechen (vgl. Zwaan 1981). Der extreme Fall $B = 100$ G erfordert bei $\phi = 10^{22}$ Mx einen anfänglichen Querschnittsradius von etwa einer Druckskalenhöhe am Boden der Konvektionszone; die Anwendung der Näherung der dünnen Flußröhren ist in diesem Fall noch marginal gerechtfertigt (vgl. Schüssler 1979). Dieser Fall dient hauptsächlich der Darstellung des asymptotischen Verhaltens der Lösungen. Entsprechend diesem großen Querschnitt ist die Kurve für $\phi = 10^{22}$ Mx und permanentes thermisches Gleichgewicht in Abb. 4.1b im Bereich der schwachen Felder keine Gerade mehr; ähnlich wie bei den adiabatischen Fällen schwacher Feldstärke in Abb. 4.1a kommt es auch hier zu keinem vollständigen Ausgleich der Auftriebskraft durch die Widerstandskraft, der Aufstieg dauert dann dementsprechend länger.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Aufstiegszeiten der magnetischen Flußröhren sehr kurz sind, wenn man den aerodynamischen Widerstand als die einzige Widerstandskraft betrachtet und die Bewegung der Flußröhren adiabatisch verläuft. Typische Werte für $\phi = 10^{20}$ Mx sind z.B. 180 Tage zu $B_0 = 100$ G, 102 Tage zu $B_0 = 10000$ G und 38 Tage zu $B_0 = 10^5$ G. Bei $\phi \gtrsim 10^{20}$ Mx und 10^2 G $\lesssim B_0 \lesssim 10^6$ G ist τ_A stets kleiner als ein Jahr. Unter diesen Umständen kann man also den magnetischen Fluß nicht länger als nur einen kleinen Bruchteil eines Sonnenzyklus in der Konvektionszone halten.

Im Bereich der kleinen turbulenten Reynoldszahlen, $Re_t \lesssim 24$, ist aber die turbulente Bremsung viel effektiver als der aerodynamische Widerstand. Nimmt man nun für F_D den in II.2 eingeführten Ausdruck für den turbulenten Mediumswiderstand, so ergeben sich die in Abb. 4.2 dargestellten Aufstiegszeiten. Die Ergebnisse hier wurden wie in Abb. 4.1b in Kurven konstanten magnetischen Flusses eingeordnet.

Einige der Hauptzüge von Abb. 4.1 treten in Abb. 4.2 wieder auf. Adiabatische und isotherme Zeitskalen nähern sich einander im Limes $B_0 \rightarrow \infty$, trennen sich aber deutlich voneinander sobald $B_0 \lesssim 10^4$ G. Die Dauer des isothermen Aufstiegs ist lang für Felder, die kleiner sind als der

Äquipartitionswert am Boden der Konvektionszone; sie beträgt, z.B., 88 Jahre für $B_0 = 1000 \text{ G}$, $\phi = 10^{20} \text{ Mx}$. Hier zeigt sich die Wirksamkeit der turbulenten Bremsung im Bereich der kleinen turbulenten Reynoldszahlen: man vergleiche diese 88 Jahre mit den 4.4 Jahren des entsprechenden Falles in Abb. 4.1b! In den adiabatischen Rechnungen, andererseits, bewirkt der konvektive Auftrieb eine Verkürzung der Zeitskalen auf wenige Monate, wieder für $B_0 \lesssim 10^4 \text{ G}$, ähnlich wie in Abb. 4.1. Die längsten adiabatischen Aufstiegszeiten betragen 360 Tage für $\phi = 10^{20} \text{ Mx}$ und 185 Tage für 10^{22} Mx . Die Flußröhren mit Äquipartitionsfeldstärke steigen in ungefähr 80 Tagen (10^{22} Mx) und 300 Tagen (10^{20} Mx). Alle diese Zeitskalen sind wiederum viel kürzer als die Sonnenzyklusperiode.

Aus den in diesem Abschnitt erörterten Ergebnissen kann man folgern, daß die Annahme der Isentropie bei Flußröhren, die sich anfänglich im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung befinden, zu Aufstiegszeiten führt, die viel kürzer sind als eine halbe Sonnenzyklusperiode. Diese Folgerung gilt selbst dann, wenn die Flußröhren eine durch die Turbulenz des Mediums erzeugte starke Bremsung erfahren.

3. Strahlungsaustausch zwischen der Flußröhre und ihrer Umgebung

Die Intensität des thermischen Austausches zwischen einer magnetischen Flußröhre und ihrer Umgebung beeinflusst in hohem Maße die Dauer ihres Aufstiegs durch die Konvektionszone, wie es sich im letzten Abschnitt gezeigt hat. Eine charakteristische Zeitskala für den Wärmeaustausch zwischen einer Flußröhre vom Radius r und dem sie umgebenden Plasma kann man wie folgt definieren

$$\tau_{\text{RAD}} = \frac{r^2}{\kappa_T}, \quad (4.25)$$

wobei κ_T die thermische Diffusivität darstellt, die wir zum Zweck einer konservativen Abschätzung von τ_{RAD} durch ihren maximalen Wert in der Konvektionszone unterhalb der ersten 1000 km unter der Photosphäre,

$$\kappa_{T_{\text{max}}} = 10^7 \text{ cm}^2/\text{sec} \quad (\text{Spruit 1977}), \text{ ersetzen. Setzt man jetzt in (4.25)}$$

die Werte von r_o ein, die Feldstärken von $100 \text{ G} \lesssim B \lesssim 10^6 \text{ G}$ und einem magnetischen Fluß $\phi = 10^{22} \text{ Mx}$ bzw. $\phi = 10^{20} \text{ Mx}$ entsprechen, so ergeben sich Werte für τ_{RAD} , die viel größer sind als die jeweiligen adiabatischen Aufstiegszeiten; im Fall $\phi = 10^{22} \text{ Mx}$ sind sie sogar größer als die Dauer des isothermen Aufstiegs. Die Annahme der Adiabasie muß dann in diesen Fällen eine gute Näherung darstellen. Die Gleichheit zwischen thermischer Austauschzeit und adiabatischer Aufstiegszeit ergibt sich erst bei niedrigeren Werten von ϕ , $\phi \lesssim 10^{19} \text{ Mx}$.

Eine eingehendere Untersuchung des Strahlungsaustausches erfordert die Benutzung der Energiegleichung (2.31),

$$\rho_i T_i \frac{ds_i}{dt} = Q \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\text{div } \vec{F}_R}, \quad (4.26)$$

anstatt (4.3a), bzw. (4.3b), im reduzierten Gleichungssystem (IV.1) mit

$$\vec{F}_R = -\rho c_p \kappa_T \text{grad } T, \quad (4.27)$$

wo jetzt κ_T nicht mehr eine obere Schranke, sondern die tiefenabhängige Funktion $\kappa_T(z)$ ist, die man einem numerischen Konvektionszonenmodell entnehmen kann.

Man kann die Auswirkung des radiativen Austausches auf den Temperaturunterschied wie folgt analysieren (s. auch Gurm und Wentzel 1967). Mit (4.26)-(4.27), dem Ausdruck (4.7) für $\Delta\rho/\rho$ und der Zustandsgleichung, und wenn man $T_{io} = T_{eo}$ als Anfangsbedingung nimmt und das Symbol x für $\frac{\Delta T}{T_i}$ einführt, ergibt sich bis auf kleine Terme der Ordnung $\frac{1}{\beta}$ bzw. $(\frac{\Delta S}{c_p})^2$,

$$\dot{x} = M_z \cdot v - \frac{2\kappa_T}{r^2} x, \quad (4.28)$$

mit den Definitionen:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_{\text{ad}}}{\beta_o} \left(1 - \frac{\rho_e^2(z)}{2} \frac{p_{eo}}{p_e(z)} \right) - \frac{\Delta S_e}{c_p} \approx \frac{V_{\text{ad}}}{\beta_o} \left(1 - \frac{\beta_o}{\beta} \right) - \frac{\Delta S_e}{c_p}, \quad (4.28b)$$

$$M_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dM}{dz}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

Die Substitution

$$\overline{\operatorname{div} \vec{F}_R} \approx -2 \rho c_p \kappa_T \frac{\Delta T}{r^2} \quad (4.29)$$

ist auch gemacht worden (vgl. Unsöld 1955, Kap.III)

Die Gleichung (4.28) beschreibt die Änderung des Temperaturunterschieds x als Funktion der äußeren Schichtung und der Intensität des thermischen Austausches mit dem Äußeren. Es sind zwei Grenzfälle zu unterscheiden: wird κ_T/r^2 groß, $\kappa_T/r^2 \rightarrow \infty$, so bewirkt der radiative Austausch eine Verringerung des Temperaturunterschiedes, so daß beide Terme auf der rechten Seite vergleichbare Werte annehmen. Denn wäre $|M_z v| \ll |(2\kappa_T/r^2)x|$, so würde

$$\dot{x} \approx - \frac{2\kappa_T}{r^2} x \quad (4.30)$$

gelten. $|x|$ würde dann exponentiell auf einer kurzen Zeitskala $r^2/2\kappa_T$ abklingen, bis $|M_z v| \approx |2\kappa_T/r^2 x|$. Eine völlige Isothermie kann aber nicht erreicht werden, solange sich die Röhre in der inhomogenen Konvektionszone bewegt. Im anderen Grenzfall, $\kappa_T/r^2 \rightarrow 0$, ist $|\dot{x}| \approx |M_z \cdot v|$. Dies entspricht der adiabatischen Näherung vom vorigen Abschnitt.

Die mit (4.26) numerisch errechneten Aufstiegszeiten sind in Abb. 4.3 dargestellt. Die Kurven mit $\phi = 10^{20}$ Mx und 10^{22} Mx fallen mit den entsprechenden adiabatischen von Abb. 4.2 zusammen. Die Annahme der Adiabasie in diesen Fällen ist daher gerechtfertigt. Eine merkliche Auswirkung des Strahlungsaustausches auf die Aufstiegszeiten trat erst bei niedrigeren Werten des magnetischen Flusses, etwa 10^{18} Mx, ein (vgl. die entsprechenden adiabatischen und isothermen Kurven, die in der Abb. als gestrichelte Linien dargestellt sind). Die größte Abweichung von der adiabatischen Aufstiegszeit kommt bei den Feldstärken zwischen 10^3 G und 10^4 G vor. Schwächere Felder, $B \lesssim 10^3$ G, erfordern größere Querschnittsflächen, so daß die charakteristische Austauschzeit wieder größer als die Aufstiegszeit ist. Der intensivste thermische Austausch geschieht allerdings bei den höheren Feldstärken, $B \gtrsim 10^{4,5}$ G; dies schlägt sich aber kaum in den Aufstiegszeiten nieder, weil in diesem Gebiet des τ_A/B_O -Diagramms der magnetische Auftrieb vorherrschend ist, so daß die isothermen und adiabatischen Aufstiegszeiten nicht sehr verschieden voneinander sind.

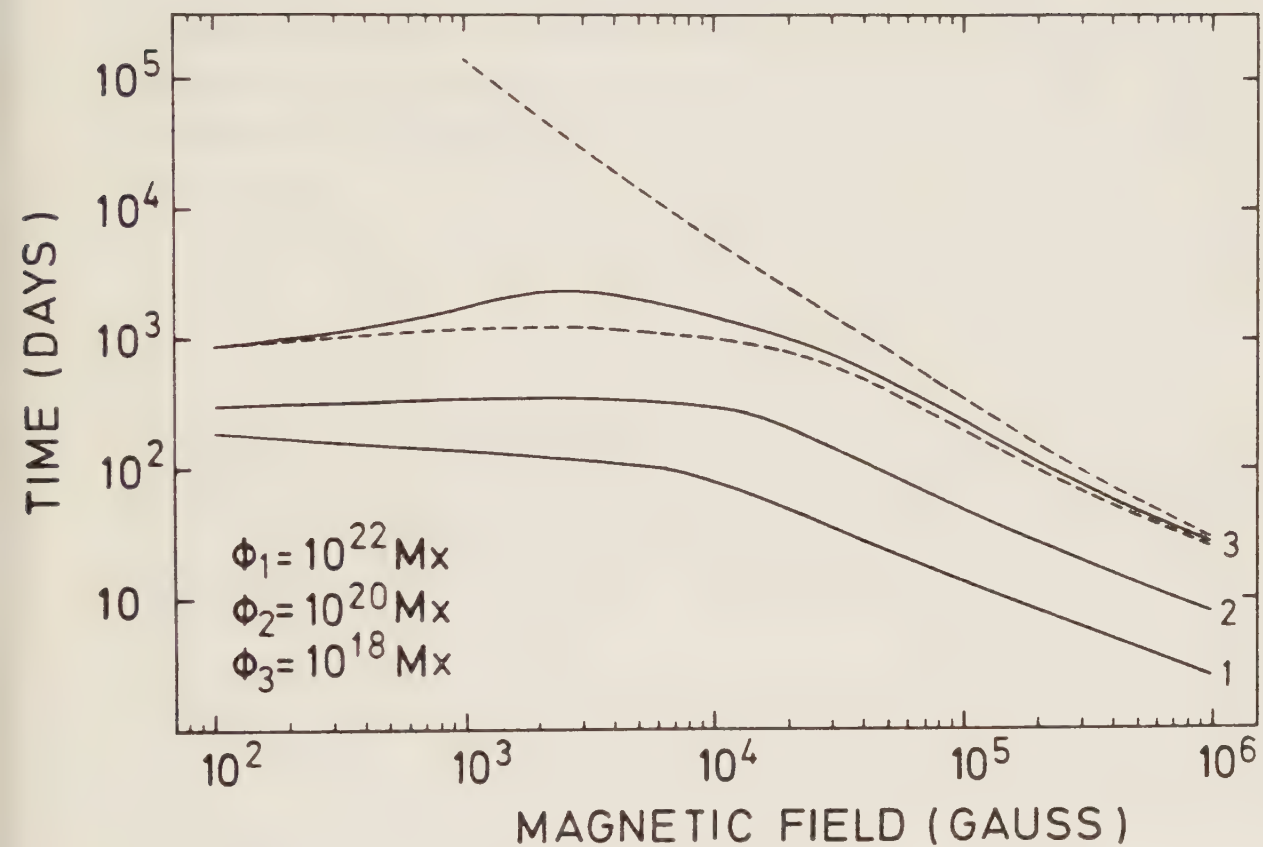


Abb. 4.3 - Aufstiegszeiten unter Berücksichtigung des Strahlungsaustausches mit dem umgebenden Plasma bei anfänglichem thermischem Gleichgewicht (durchgezogene Kurven). Eine merkliche Abweichung vom adiabatischen Verhalten kommt nur bei $\phi = 10^{18} \text{ Mx}$ vor. Zum Vergleich sind in diesem Fall auch die adiabatische (untere gestrichelte Kurve) und isotherme (obere gestrichelte Kurve) Aufstiegszeit eingezeichnet.

Die Höchstdauer des Aufstieges einer Flußröhre mit $\phi = 10^{18}$ Mx wird bei $B \approx 10^{3,5}$ erreicht und beträgt 6,5 Jahre, bereits ein erheblicher Teil einer Sonnenzyklusperiode. Dennoch kann man daraus nicht folgern, daß eine solche Flußröhre so lange Zeit in der Konvektionszone ungestört bleibt. Denn diese kleinen Flußröhren - für $B_0 = 10^{3,5}$ G und $\phi = 10^{18}$ Mx ist r_0 erst 100 km - sind wahrscheinlich nicht in der Lage, der turbulenten Konvektion zu widerstehen und ihre Einheit jahrelang zu bewahren. In IV.5 wird auf diesen Punkt wieder eingegangen; eine ausführliche Diskussion findet man in Galloway + Weiss (1981) und Golub et al. (1981). Die Ergebnisse über Flußröhren mit $\phi \leq 10^{18}$ Mx sind dann nur unter diesem Vorbehalt anzunehmen.

4. Flußröhren im mechanischen Gleichgewicht.

Stabilitätsanalyse. Quasistatischer Aufstieg.

Die bisher gefundenen kurzen Aufstiegszeiten für Flußröhren mit der Anfangsbedingung $T_{io} = T_{eo}$ lassen die Frage aufkommen, ob sich die Flußröhren am Boden der Konvektionszone in einem Zustand thermischen Gleichgewichtes befinden. Eine andere Möglichkeit ist, daß sie sich im mechanischen Gleichgewicht mit der Umgebung, $\rho_{io} = \rho_{eo}$, befinden. Ist die Dichte einer Flußröhre gleich der äußeren Dichte, so muß ihre Temperatur kleiner als die der Umgebung sein; die Flußröhre wird dann durch Einstrahlung erhitzt und Auftrieb erfahren. Die thermische Austauschzeitsskala ist i.A. sehr langsam im Vergleich zur dynamischen Zeitskala, wie in den vorigen Abschnitten gezeigt; die Flußröhre wird dann ihre anfängliche Ruhelage verlassen, ohne zum vollständigen thermischen Ausgleich gekommen zu sein.

Parker (1975) hat den Fall der Flußröhren, die sich im mechanischen Gleichgewicht in einem stabil geschichteten Medium befinden, untersucht und festgestellt, daß ihre Bewegung quasistatisch und sehr langsam erfolgt (s.a. Gurm und Wentzel 1967): die Einstrahlung in die Flußröhre bewirkt in ihr eine leichte Dichteabnahme, so daß sich die Flußröhre, um das Gleichgewicht wiederherzustellen, zu einem ein wenig höheren Niveau bewegen muß, wo sich derselbe Vorgang wieder abspielt. Der Aufstieg besteht also aus einer kontinuierlichen Folge quasistatischer Zustände und seine Dauer ist sehr lang.

In der Konvektionszone ist die Schichtung jedoch überadiabatisch und damit instabil. Der magnetische Druck in einer horizontalen Röhre hängt nun wegen der Flußerhaltung quadratisch von der Dichte ab:

$$p_m = \frac{B^2}{8\pi} \propto \rho_i^2 ,$$

so wie der Druck eines Gases mit $\gamma = 2$ in einem adiabatischen Vorgang. Da die äußere Schichtung in der tiefen Konvektionszone fast adiabatisch ist, mit $\gamma \approx 5/3$, wirkt das Magnetfeld in einer adiabatischen Verschiebung der Flußröhre stabilisierend. Bei schwachen Feldern ist jedoch dieser Effekt unwichtig für das Verhalten des Gesamtdruckes, und das ursprüngliche Gleichgewicht ist dann instabil. Die Flußröhre findet in diesem Fall keinen Gleichgewichtszustand oberhalb des Ausgangsniveaus, und der langsame quasistatische Aufstieg geht über in einen schnellen dynamischen.

Um diesen Ideen mathematische Form zu geben, suchen wir zunächst einen Ausdruck für den Auftriebsterm als Funktion von β und $(\Delta S)_e$ und leiten daraus ein Stabilitätskriterium für die Flußröhren im mechanischen Gleichgewicht gegenüber adiabatischen Verschiebungen. Durch Wiederholung des in IV.2 durchgeführten Verfahrens (4.7)-(4.9), jetzt aber mit dem der Anfangsbedingung $\rho_{io} = \rho_{eo}$ entsprechenden Wert von $\frac{S_{io}-S_{eo}}{c_p}$, ergibt sich

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_i} = \frac{1}{\gamma \beta_o} \left(1 - \frac{\beta_o}{\beta}\right) + \frac{\Delta S_e}{c_p} - \frac{\Delta S_i}{c_p} , \quad (4.31)$$

wo der Term

$$\frac{\Delta S_i}{c_p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_i(z) - S_{io}}{c_p} \quad (4.32)$$

die Entropieänderung im Innern der Röhre infolge von Strahlungsaustausch mit der Umgebung beschreibt.

Man stelle sich nun eine horizontale Flußröhre im mechanischen Gleichgewicht vor, die auf adiabatische Weise parallel zu sich selbst in den Abstand Δz von ihrer Ruhelage in vertikaler Richtung versetzt wird, mit $|\Delta z| \ll H_{p_o}$. In dieser einfachen linearen Analyse wird die Superadiabatizität δ

in Δz annähernd konstant vorausgesetzt und der Effekt der Reibung vernachlässigt. Ohne Magnetfeld wäre die nachfolgende Bewegung der Flußröhre in stabiler Schichtung oszillatorisch mit der Brunt-Väisälä-Frequenz:

$$\omega_{BV}^2 = \frac{-v_s^2}{\gamma H_p^2} \delta, \quad (4.33)$$

bzw. in instabiler Schichtung mit $\delta > 0$ exponentiell anwachsend, und $|\omega_{BV}|$ wäre dann die entsprechende Anwachsrate. Das Stabilitätskriterium wäre in diesem Fall einfach das gewöhnliche Schwarzschild-Kriterium:

Stabilität $\Leftrightarrow \delta < 0$. Für ein endliches Magnetfeld $B \neq 0$ ist jedoch das Schwarzschild-Kriterium nicht mehr gültig. Mit (4.13) läßt sich aus (4.31) mit $\Delta S_1 = 0$ folgende Schwingungsfrequenz - die "magnetische Brunt-Väisälä-Frequenz" - ableiten:

$$\omega_{MBV}^2 = \frac{v_A^2}{2 H_p^2} \left[\frac{1 - 2\nabla_{ad}}{\gamma} - \beta_o \delta_o \right]. \quad (4.34)$$

Das Stabilitätskriterium ist dann:

$$\text{Stabilität} \Leftrightarrow \beta_o \delta_o < \frac{1 - 2\nabla_{ad}}{\gamma} \approx 0.12. \quad (4.35)$$

Nach (4.35) kann eine horizontale Flußröhre also tatsächlich in einer überadiabatischen Schichtung stabil sein, wenn das Magnetfeld stark genug ist. Für $z_o = 1.90 \cdot 10^5$ km ist $\delta = 5.5 \cdot 10^{-8}$, so daß das Kriterium (4.35) für $B_o \gtrsim 3 \cdot 10^4$ G erfüllt wird. Diese Resultate stehen in Einklang mit den Ergebnissen der allgemeinen, von Spruit und Van Ballegooyen (1982) durchgeführten zweidimensionalen Störungsanalyse, wo die Bedingung (4.35) als asymptotisches Stabilitätskriterium für den Fall unendlicher Störungswellenlänge gewonnen wird (s. Kap. V). Das Stabilitätskriterium (4.35) ist allerdings nur in diesem Fall gültig. Denn auch die Flußröhren, die die Stabilitätsbedingung (4.35) erfüllen, sind instabil gegenüber Störungen, welche die Flußröhre mit einer endlichen Wellenlänge verbiegen. Diese Instabilitäten werden in Kap. V untersucht.

Sei B^* jene Feldstärke, für die die Bedingung (4.35) mit Gleichheitszeichen erfüllt wird. Für alle Feldstärken unterhalb B^* ist das anfängliche Gleichgewicht instabil; der konvektive Auftrieb, der die Instabilität veran-

laßt, ist in allen Höhen oberhalb z_0 vorherrschend, so daß die Flußröhre nach einer beliebigen Verschiebung nach oben weiter bis zur Oberfläche aufsteigen wird. Wenn $B_0 > B^*$, ist das Gleichgewicht der horizontalen Flußröhre dagegen stabil; ein Aufstieg kann nur infolge von Einstrahlung aus der Umgebung erfolgen. Der Einfluß des Strahlungsaustausches und der Hintergrundschichtung auf das zeitliche Verhalten der Flußröhre wird in derselben Näherung wie in Gleichung 4.28 durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right) = N_{,z} \cdot v + \frac{2\kappa_T}{r^2} x, \quad (4.36)$$

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\gamma\beta_0} \left(1 - \frac{\rho_e(z)}{2} \frac{p_{eo}}{p_e(z)} \right) + \frac{\Delta Se}{c_p} \approx \frac{1}{\gamma\beta_0} \left(1 - \frac{\beta_0}{\beta} \right) + \frac{\Delta Se}{c_p}, \quad (4.37)$$

die mit Hilfe von (4.26), (4.29) und (4.31) abgeleitet werden kann.

Aus der Stabilitätsbedingung $B_0 > B^*$ folgt $N_{,z} < 0$; x ist anfänglich auch negativ. Die Entwicklung der Flußröhre wird durch den Gegensatz zwischen den zwei Termen auf der rechten Seite von (4.36) bestimmt. Im Grenzfall kleinen Querschnittes und anfänglicher Feldstärke in der Nähe von B^* dominiert der Term $\frac{2\kappa_T}{r^2} x$. Das anfängliche Gleichgewicht geht in diesem Fall schnell verloren und wird im weiteren Aufstieg nicht mehr erreicht. Im anderen Grenzfall, nämlich bei großen Querschnitten oder starken Feldern können die negativen Werte von $N_{,z}$ durch den Strahlungseinfluß nicht schnell genug überwunden werden. Gleichung (4.36) fordert in diesem Fall, daß die Geschwindigkeit v so klein sei, daß

$$|N_{,z} \cdot v| \approx \left| \frac{2\kappa_T}{r^2} x \right| \quad (4.38)$$

gilt.

Dieser langsame, quasistatische Aufstieg ist dem von Parker (1975) beschriebenen ähnlich. Diese Aufstiegsweise kann nur so lange dauern bis ein Niveau, $\tilde{z}$, erreicht wird, wo das Anwachsen des konvektiven Auftriebs die Zunahme des negativen magnetischen Auftriebs gerade kompensiert und

N_z null, ab dann positiv wird (vgl. Gl. 4.31). Sobald $\tilde{z}$ erreicht wird, wird die quasistatische Bewegung der Flußröhre mit $\Delta\rho/\rho_i \approx 0$ unmöglich, und der Strahlungsaustausch ist für den weiteren Aufstieg der Flußröhre nicht mehr wesentlich.

Die Ergebnisse der numerischen Lösung des reduzierten Gleichungssystems mit Strahlungsaustausch (4.26) zu der Anfangsbedingung $\rho_{io} = \rho_{eo}$ sind in Abb. 4.4 dargestellt. Der Aufstieg der Flußröhren mit $B \lesssim 10^4$ G ist nicht sehr verschieden von den entsprechenden Fällen des vorigen Abschnitts. Seine Dauer ist hier jedoch etwas länger, weil der langsame Prozeß des Temperatúrausgleiches zusätzlicher Zeit bedarf, um die Flußröhre aus ihrer Ruhelage zu bringen. Die zusätzliche Aufstiegszeit der Flußröhren aus dem anfänglichen mechanischen Gleichgewicht wird hauptsächlich in den ersten 3000 km oberhalb z_o , also noch am Boden der Konvektionszone, verbracht (s. Abb. 4.5). Die Dauer des Aufstiegs jenseits der ersten 3000 km ist gleich für Flußröhren, die sich anfänglich im mechanischen bzw. im thermischen Gleichgewicht befunden haben.

Bei den Feldern oberhalb $4 \cdot 10^4$ G spielt der radiative Austausch stets eine entscheidende Rolle. Im Gegensatz zu allen bisher beschriebenen Modellen ist die Aufstiegsdauer hier desto kürzer, je niedriger der magnetische Fluß, d.h., je kleiner der Querschnitt ist. Bei kleinen Querschnitten ist der radiative Austausch sehr effektiv, so daß der anfängliche Gleichgewichtszustand schnell verloren geht und während des ganzen Aufstiegs zur Oberfläche nicht wiederhergestellt werden kann. Das gilt, z.B., im Fall $\phi = 10^{20}$ Mx für Feldstärken $10^4 \text{ G} \lesssim B_o \lesssim 2 \cdot 10^5 \text{ G}$ und im Fall $\phi = 10^{18}$ Mx bei allen in der Abbildung dargestellten Feldstärken. Der andere Grenzfall, nämlich der quasistatische Aufstieg, wird durch die steilen Äste im oberen rechten Quadranten der Abbildung dargestellt. Der Aufstieg ist in diesem Gebiet sehr langsam; Zeitskalen $\tau_A \gtrsim 2000$ Tage werden im Fall $\phi = 10^{22}$ Mx für $B_o \gtrsim 4 \cdot 10^4 \text{ G}$ und im Fall $\phi = 10^{20}$ Mx für $B_o \sim 10^6 \text{ G}$ erreicht. Obwohl r_o bei zunehmendem B_o und konstantem ϕ immer kleiner wird, was verstärkte Einstrahlung zur Folge hat, nimmt die Aufstiegszeit bei wachsendem B_o rapide zu. Der Grund hierfür ist, daß das Niveau $\tilde{z}$, wo $N_z = 0$ wird, bei steigendem B_o immer näher an die Photosphäre heranrückt und der größte Teil der Aufstiegszeit dazu verwendet wird, $\tilde{z}$ zu erreichen. Sobald $\tilde{z}$ überschritten wird, kommt ein Quasigleichgewicht nicht mehr zustande, und die Flußröhre treibt schnell zur Photosphäre.

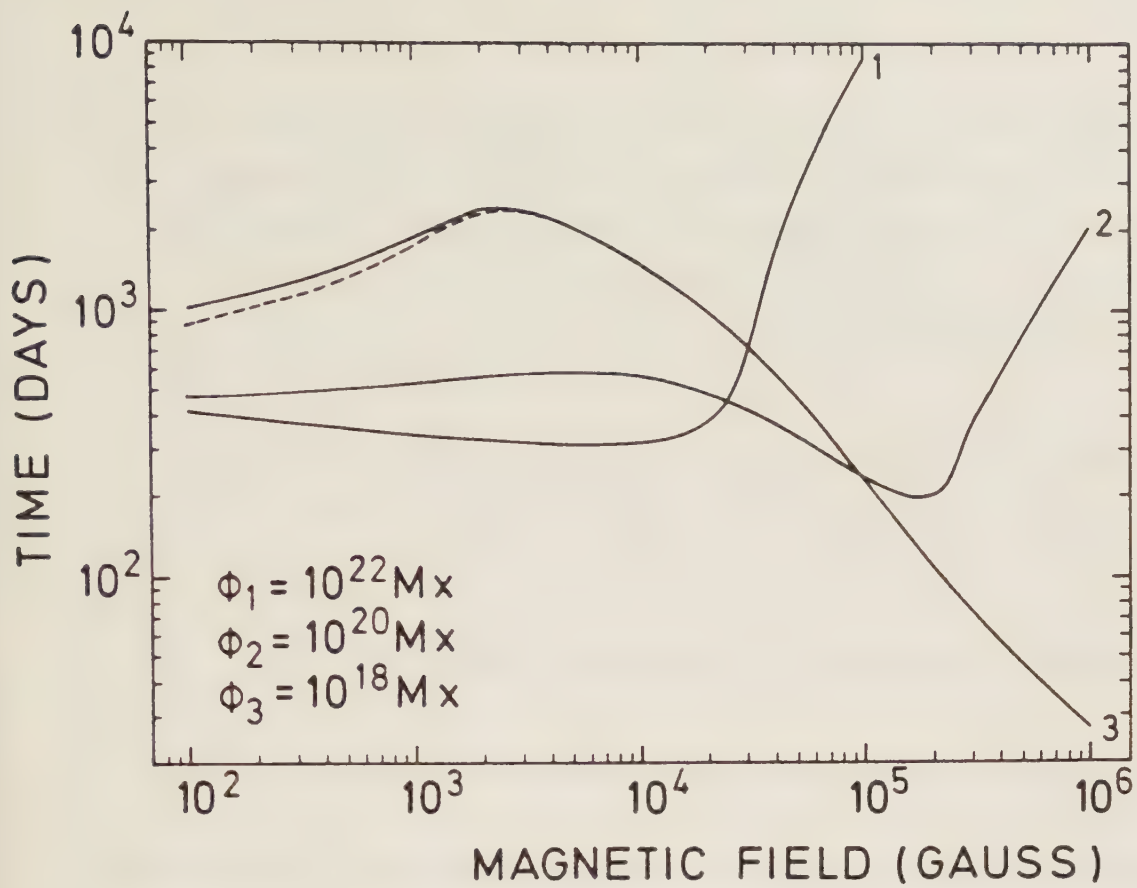


Abb. 4.4 - Aufstiegszeiten mit Strahlungsaustausch für anfänglich im mechanischen Gleichgewicht befindliche Flußröhren. Die Kurve für $\phi = 10^{18} \text{ Mx}$ liegt sehr nahe bei der entsprechenden Kurve in Abb. 4.3 - hier als gestrichelte Kurve dargestellt.

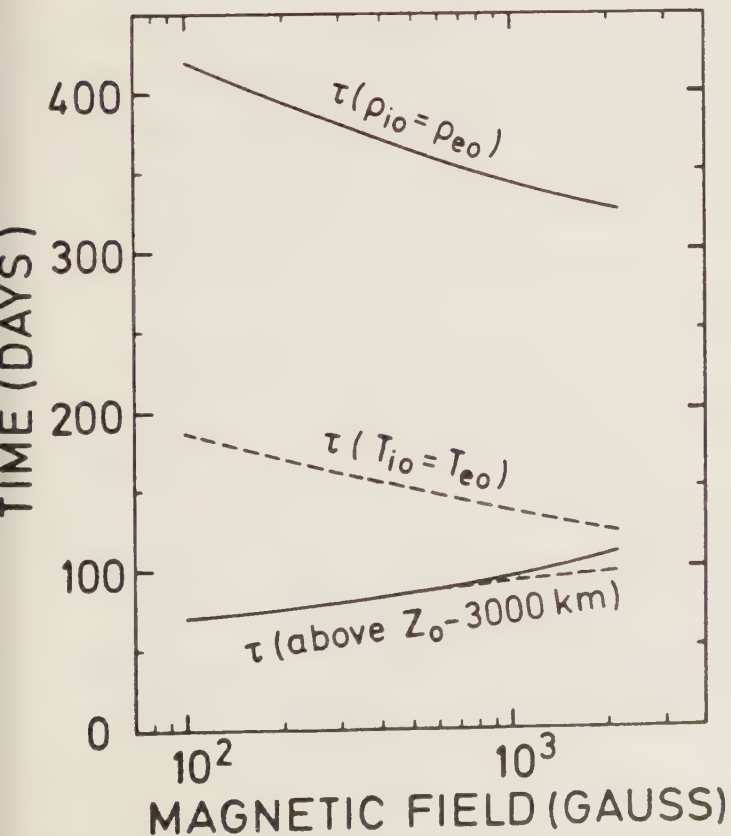


Abb. 4.5 - Aufstiegszeiten mit Strahlungsaustausch für Flußröhren mit $\phi = 10^{22} \text{ Mx}$, die sich anfänglich im mechanischen Gleichgewicht (durchgezogene Linien) bzw. im thermischen Gleichgewicht (gestrichelte Linien) befanden, sowohl für den gesamten Aufstieg (zwei obersten Kurven), wie für den gesamten Aufstieg außer den ersten 3000 km (zwei untere Kurven). Der Aufstieg der beiden Arten von Flußröhren oberhalb 3000 km erfolgt nach dieser Abbildung praktisch gleich schnell ($B_0 \lesssim 10^3 \text{ G}$).

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß die Aufstiegsweise der Flußröhren aus dem mechanischen Gleichgewicht, $\rho_{io} = \rho_{eo}$, bei Feldern, die etwas schwächer als der Aquipartitionswert sind, nicht wesentlich verschieden ist von jener der Flußröhren, die aus einem anfänglichen thermischen Gleichgewicht aufsteigen; in beiden Fällen spielt die konvektive Instabilität der äußeren Schichtung eine zentrale Rolle. Anders dagegen bei den stark konzentrierten Feldern, $B \gtrsim B_{\text{Ag}}$, wo der Aufstieg durch Strahlungsaufheizung angetrieben wird und auf quasistatische Weise mit sehr langsamer Zeitskala erfolgt, die in einigen Fällen mehrere Jahre beträgt.

5. Zusammenfassung des Kapitels und ergänzende Bemerkungen.

Die wichtigsten Ergebnisse dieses Kapitels lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Infolge der überadiatischen Schichtung der Konvektionszone verläuft der adiabatische Aufstieg der horizontalen Flußröhren mit schwacher Feldstärke in einer viel kürzeren Zeitskala, als wenn sie, wie in früheren Arbeiten angenommen, durch intensiven Strahlungsaustausch mit der Umgebung ständig nahe am thermischen Gleichgewicht bleiben. Der Grund dafür ist, daß im ersteren Fall der Aufstieg hauptsächlich durch konvektiven Auftrieb angetrieben wird, während im zweiten der magnetische Auftrieb allein den Aufstieg bestimmt. Infolgedessen ist die Dauer aller für $\phi \gtrsim 10^{20}$ Mx und $10^2 \text{ G} \lesssim B_0 \lesssim 10^6$ berechneten adiabatischen Aufstiegsvorgänge aus einem anfänglichen Zustand thermischen Gleichgewichts viel kürzer als die Sonnenzyklushalbperiode, 11 Jahre (IV.2). Diese Behauptung trifft zu sowohl für eine durch aerodynamischen Widerstand gebremste Bewegung wie auch bei Berücksichtigung der bremsenden Wirkung der Turbulenz im umgebenden Medium.

Eine genauere Untersuchung des thermischen Austausches der Flußröhre mit ihrer Umgebung ergibt, daß der Aufstieg tatsächlich adiabatisch erfolgt bei Flußröhren mit Werten des magnetischen Flusses oberhalb 10^{20} Mx (IV.3): Der Strahlungsaustausch bewirkt in diesem Fall keine merkliche Verlängerung der Aufstiegszeiten gegenüber den adiabatischen Werten. Eine solche kommt erst bei kleineren Flußröhren mit einem niedrigen magnetischen Fluß, nämlich $\phi \lesssim 10^{19}$ Mx, vor, und zwar wegen des entsprechenden kleinen Röhrenquerschnittes, der einen intensiveren Strahlungsaustausch mit der Umgebung

zuläßt. Diese Verlängerung ist jedoch sogar für $\phi = 10^{18}$ Mx nur in einem kleinen Bereich von Feldstärken von Bedeutung, $10^3 \text{ G} < B_0 < 10^4 \text{ G}$, und die sich ergebenden Aufstiegszeiten sind ohnehin kürzer als 6,5 Jahre.

Die Flußröhren, die sich anfänglich im mechanischen Gleichgewicht mit der Umgebung befinden, lassen sich nach ihrer Aufstiegsweise in drei Gruppen einteilen (IV.4):

1. Wenn $\phi < 10^{18}$ Mx, ist der Röhrenquerschnitt für $B > 100 \text{ G}$ so klein, daß ein wirksamer Strahlungsaustausch zustandekommt und die Flußröhren sehr schnell aus ihrem anfänglichen Gleichgewicht gebracht werden. Die Aufstiegszeiten sind in diesem Fall den in IV.3 für den Fall ausgeglichener Anfangstemperatur und unter Berücksichtigung des Strahlungsaustausches berechneten Werten sehr ähnlich.

Bei den anderen zwei Gruppen, nämlich bei allen Flußröhren mit $\phi > 10^{20}$ Mx, wird die Aufstiegsweise durch den Gegensatz zwischen dem radiativen Austausch und dem destabilisierenden Effekt der äußeren Schichtung einerseits und dem nun stabilisierenden Effekt des magnetischen Druckes andererseits bestimmt:

2. Bei nicht zu hohen Feldern ist der Effekt der instabilen äußeren Schichtung dominierend, so daß der größte Teil des Aufstiegs ähnlich wie bei den entsprechenden anfänglich isothermen Flußröhren - $T_{i0} = T_{e0}$ - verläuft. Die Aufstiegsdauer ist jedoch hier etwas länger; der Grund dafür ist die anfänglich langsame Entfernung vom mechanischen Gleichgewicht, die durch Einstrahlung vom äußeren Plasma erfolgen muß, so daß zunächst eine gegenüber dem Fall $T_{i0} = T_{e0}$ zusätzliche Zeit im wesentlichen am Boden der Konvektionszone verbracht wird.

3. Bei hohen Feldstärken ist der stabilisierende Effekt des Magnetfeldes dominierend, so daß der Aufstieg durch thermischen Austausch angetrieben wird und auf quasistatische Weise erfolgt mit sehr langer Zeitskala, vergleichbar mit der Sonnenzyklushalbperiode.

Alle gefundenen Aufstiegszeiten sind viel kürzer als 11 Jahre, außer in dem letztgenannten Fall der Flußröhren mit hoher Feldstärke und anfänglich im mechanischen Gleichgewicht mit der Umgebung. Ein Transport von magnetischem Fluß zur Oberfläche erfolgt dennoch auch in diesem letzten Fall in einer kurzen Zeitskala. Denn durch die dynamische Entwicklung von Flußröhreninstabili-

täten mit endlicher Wellenlänge kann ein Teil der Flußröhre auf einer dynamischen Zeitskala zur Photosphäre befördert werden, und dieser Vorgang dauert, wie es sich im nächsten Kapitel zeigen wird, viel kürzer als 11 Jahre.

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir auf einige mögliche physikalische Vorgänge hinweisen, welche die Gültigkeit jeder Rechnung mit rein horizontalen Flußröhren, die sich starr durch die Konvektionszone bewegen, begrenzen könnte. Es sind, z.B., Prozesse denkbar, in denen die Flußröhre während des Aufstiegs in kleinere Fasern aufgespalten wird. Eine Möglichkeit können Unterschiede im Auftrieb über den Querschnitt der Flußröhre bieten: die äußeren Schichten der Flußröhre werden näher am thermischen Gleichgewicht mit dem Äußeren sein als die Hauptachse; dadurch können Auftriebsunterschiede längs des Radius hervorgerufen werden, somit Spannungen auf dem Röhrenquerschnitt entstehen. Wenn dieser Effekt genügend stark ist, kann eine Flußröhre aufspalten und ihre Einheit verlieren. Eine andere Möglichkeit ist, daß die Flußröhre infolge der inhomogenen Druckverteilung der sie umgebenden Strömungen noch während des Aufstiegs gespalten wird. Dieser Vorgang ist insbesondere von M. Schüßler (1979) in einer detaillierten numerischen Rechnung untersucht worden. Eine solche Röhrenspaltung könnte nicht ohne Folgen für die Aufstiegszeit bleiben, indem, z.B. ein adiabatisch vorausgesetzter Aufstieg in der Tat eher isotherm verläuft, weil der Strahlungsaustausch des umgebenden Plasmas mit den aus der Spaltung resultierenden kleineren Flußröhren effektiver ist als mit der ursprünglichen Flußröhre. Die Hauptfolgerungen dieses Kapitels würden trotzdem ihre Gültigkeit behalten. Denn damit der Strahlungsaustausch die Zeitskala wesentlich verändert, muß der magnetische Fluß, wie es sich herausgestellt hat, kleiner als etwa 10^{18} Mx sein. Die Annahme der Adiabasie einer Flußröhre mit $\phi \gtrsim 10^{20}$ Mx ist daher gerechtfertigt, außer in dem Fall, daß sie in sehr viele, etwa mehr als 100, einzelne Fasern aufgespalten wird.

Die Wechselwirkung der Konvektion mit den Flußröhren ist hier in vereinfachter Form behandelt worden. Großräumige konvektive Strömungen mit einer Längenskala viel größer als der Querschnittsradius - Riesenzellen -, die in diesem Kapitel nicht berücksichtigt wurden, könnten z.B. die Flußröhrenbewegung stark beeinflussen, indem sie Teile derselben am Boden der Konvektionszone festhalten während sie andere Teile schneller als sonst nach oben befördern (s. dazu Meyer, Schmidt, Simon und Weiss, 1979). Die Bewegung von magnetischen Flußröhren in einer solchen Konvektionszelle wird in Kap. VI behandelt.

Andererseits wurde hier der Effekt der turbulenten Konvektion auf die Röhrenbewegung durch einen einzelnen Term, den turbulenten Viskositätsterm, parametrisiert, der nur eine Bremsung der Fortbewegung bewirkt, unter der Annahme, daß die Konvektion im Innern der Flußröhre unterdrückt ist. Man kann die in der Einleitung erwähnten Arbeiten von Weiss und Mitarbeitern über Boussinesq-Magnetokonvektion aufgreifen, und sich fragen, unter welchen Umständen die Flußröhren der Konvektion widerstehen und durch die Konvektionszone ohne Verlust ihrer Identität aufsteigen können. Nach Galloway und Weiss (1981) werden alle Flußröhren mit $\phi > 10^{20}$ Mx oder 10^{21} Mx und einer Feldstärke oberhalb des Äquipartitionswertes der Konvektion standhalten und die Photosphäre erreichen, während die schwächeren Felder die Konvektionszone nicht durchqueren können, ohne daß sie zerfasert werden und die konzentrierte Röhrenstruktur verloren geht.

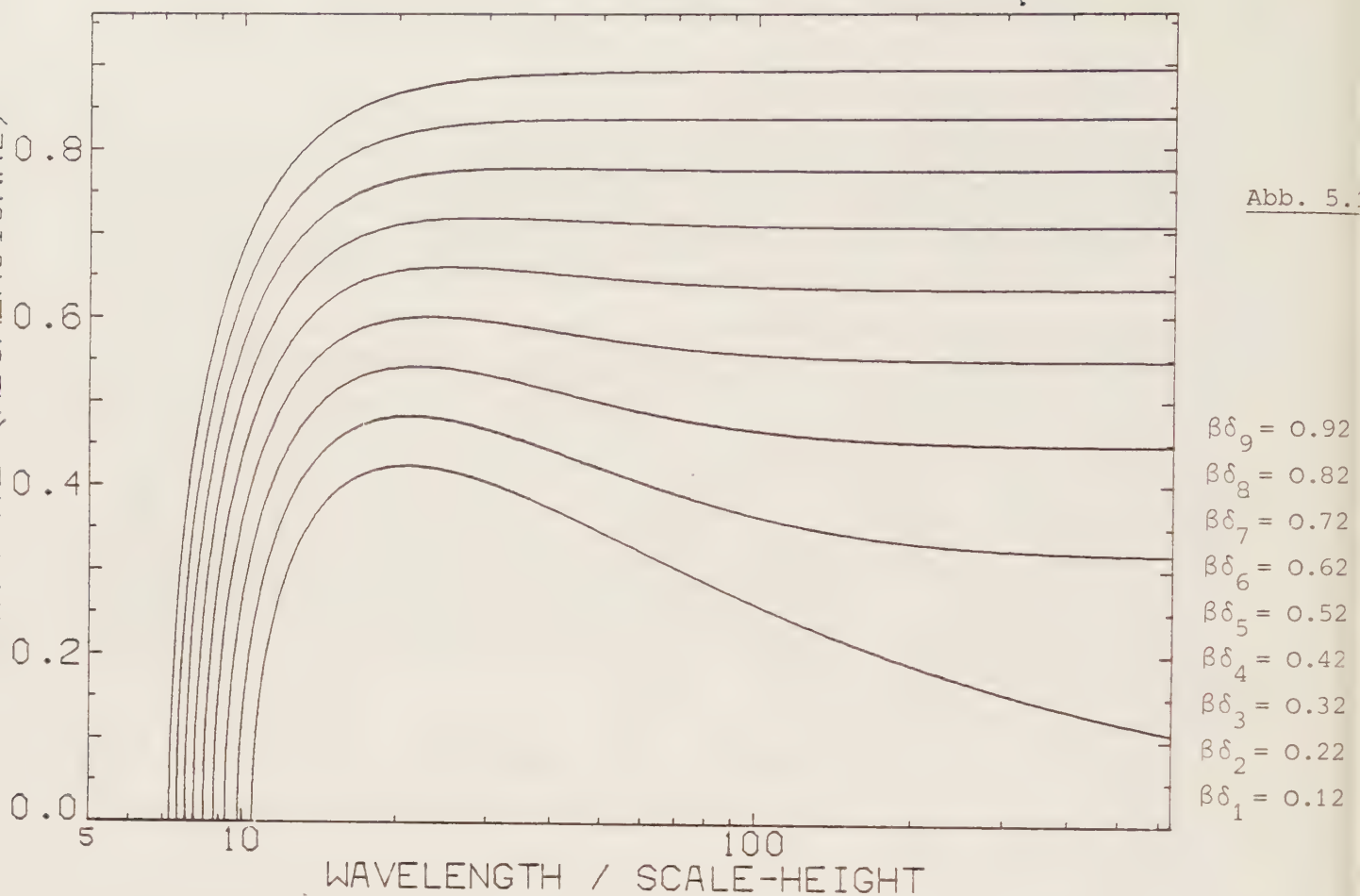
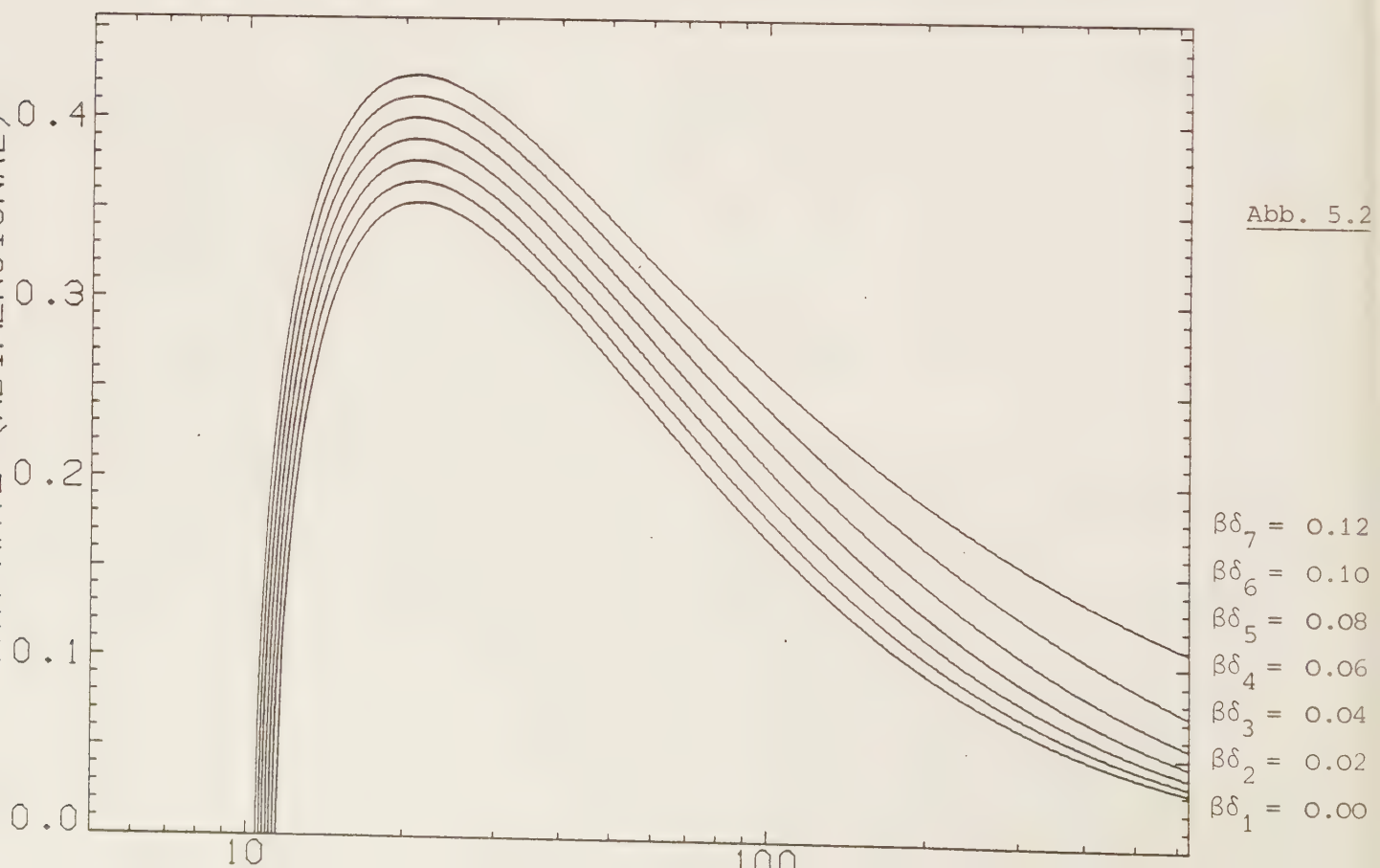


Abb. 5.1 und 5.2 -

Anwachsrate der instabilen Normalmoden als Funktion der Wellenlänge für mehrere Werte von $\beta\delta \geq 0$. Die hier benutzte Dispersionsbeziehung entspricht der von Spruit und Van Ballegooijen abgeleiteten (5.1) unter Vernachlässigung der zusätzlichen Trägheit der umgebenden Flüssigkeit.



V. Zeitabhängige nichtlineare Entwicklung der Knickinstabilität von horizontalen magnetischen Flußröhren

1. Lineare Stabilitätsanalyse

Das mechanische Gleichgewicht der magnetischen Flußröhren in der Konvektionszone wird ständig von den umgebenden konvektiven Strömungen gestört. In einer ursprünglich im mechanischen Gleichgewicht befindlichen horizontalen Flußröhre, die einer Störung unterworfen wird, welche die Feldlinien sinusförmig verbiegt, treten Strömungen entlang den Feldlinien und magnetische Krümmungskräfte auf, die ihr Stabilitätsverhalten neben dem bereits im letzten Kapitel behandelten konvektiven bzw. magnetischen Auftrieb bestimmen. In der linearen Stabilitätsanalyse (Spruit und Van Ballegooijen 1982) betrachtet man eine solche Störung mit der Wellenzahl k und dem Zeitverhalten $\exp(i\omega t)$ und leitet eine Dispersionsbeziehung ab, die im Grenzfall großer Werte des Plasma- β und quasiadiabatischer Schichtung, $|\delta| \ll 1$, bei endlichem $\beta\delta$ wie folgt lautet (Spruit und Van Ballegooijen, Gl. (39)):

$$\bar{\omega}^4 + \bar{\omega}^2 \left[-3\bar{k}^2 - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \beta\delta \right] + 2\bar{k}^2 \left(\bar{k}^2 - \frac{1}{2\gamma} - \frac{\beta\delta}{2} \right) = 0, \quad (5.1)$$

wo $\bar{\omega}$ und $\bar{k}$ die dimensionslosen Frequenz und Wellenzahl darstellen,

$$\bar{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \omega \cdot \sqrt{2} \cdot T_{\text{ALFVEN}} \quad \text{und} \quad \bar{k} = k H_p, \quad (5.2)$$

$$\text{mit } T_{\text{ALFVEN}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{H_p}{v_A}.$$

Aus dieser Dispersionsbeziehung ergeben sich unmittelbar folgende rein mathematische Folgerungen (vgl. Abb. 5.1):

1. Im Grenzfall kleiner Wellenlängen sind alle 4 Wurzeln von (5.1) reell.
2. Paare konjugierter komplexer Lösungen treten nur im Bereich

$$\beta\delta > -\frac{1}{\gamma} \approx -0.6 \quad (5.3)$$

auf.

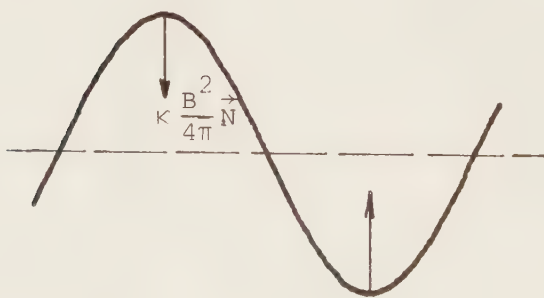
3. Instabiles Verhalten infolge einer Störung mit $k = 0$ - d.h. einer vertikalen Verschiebung der Flußröhre ohne Formänderung derselben - tritt nur bei

$$\beta\delta > \frac{2-\gamma}{\gamma^2} \approx 0.12 \quad (5.4)$$

auf (vgl. dazu (4.35)).

Die erste dieser Tatsachen ist physikalisch darauf zurückzuführen, daß bei den Störungen kleiner Wellenlänge die magnetische Krümmungskraft alle anderen Kräfte überwiegt, und sie stabilisiert die Flußröhren. Nach 2. und 3. kann man drei verschiedene Stabilitätsbereiche gemäß dem Wert des Parameters $\beta\delta$ unterscheiden. Stabilität gegenüber Störungen aller Wellenlängen findet man nur für alle Werte von $\beta\delta$ unter -0.6 . Im Zwischenbereich $-0.6 < \beta\delta < 0.12$ ist zwar die Normalmode zu $k = 0$ stabil, aber es treten schon instabile Normalmoden mit endlicher Wellenlänge auf. Nach Spruit und Van Ballegooijen ist dieses Verhalten darauf zurückzuführen, daß die Hintergrundsschichtung nicht überadiabatisch genug ist, um den stabilisierenden Effekt des Magnetfeldes bei der Normalmode zu $k = 0$ zu überwinden; die Abwärtsströmung entlang den Feldlinien ist jedoch stark genug, um die Instabilität der Normalmoden mit gekrümmten Feldlinien hervorzurufen, etwa wie in der Parkerschen Instabilität des galaktischen Magnetfeldes, (s. Parker 1979 und Acheson 1979). Endlich, für Werte von $\beta\delta$ größer als 0.12 ist die konvektive Instabilität vorherrschend, so daß auch die horizontale Normalmode instabil ist.

Soweit die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse. Die Berechnung der nichtlinearen Entwicklung instabiler Normalmoden, die in diesem Kapitel unternommen wird, geht von einer Störung endlicher Wellenlänge und kleiner aber endlicher Amplitude aus. Schon bei kleiner Amplitude, z.B. bei einem Hundertstel der lokalen Druckskalenhöhe machen sich mehrere nichtlineare Effekte bemerkbar, bei denen sich eine nach oben gerichtete resultierende Kraft auf die Flußröhre ergibt. Einige von ihnen sind auf die inhomogene



Struktur der Konvektionszone zurückzuführen. In einem homogenen Medium, z.B., wäre die magnetische Krümmungskraft, $\frac{B^2}{4\pi} \kappa$, im oberen Teil der gestörten Röhre gleich der im unteren Teil aber in entgegengesetzter Richtung; die resultierende Kraft wäre dann Null. In einer Flußröhre in der Konvektionszone nimmt die Dichte

mit der Höhe ab; da sich das Magnetfeld bei konstantem ξ proportional zur Dichte verhält (2.18) muß $\frac{B^2}{4\pi}$ im oberen Teil kleiner sein als im unteren Teil, dasselbe gilt für die Beschleunigung, $\frac{B^2}{4\pi\rho} \propto$. Daraus ergibt sich eine nach oben gerichtete resultierende Kraft (Anhang B). Ähnlich verhält es sich mit der nach oben wachsenden Superadiabatizität der äußeren Schichtung, δ . Die nach unten verschobenen Massenelemente treffen auf einen etwas kleineren Wert von δ als im Anfangsniveau, das Gegenteil gilt für die nach oben verschobenen Elemente. Der instabilisierende Effekt der äußeren Schichtung ist dann etwas größer in den letzteren als in den ersteren, woraus sich ein Netto-Auftrieb der gesamten Flußröhre ergibt. Denselben Effekt liefert die Verlängerung der Flußröhre, die durch die Verbiegung der Feldlinien verursacht wird und eine geringe Dichteabnahme im Mittel über die Flußröhre nach sich zieht.

Die Nichtlinearität aller dieser Effekte zeigt sich darin, daß die resultierende Kraft auf die Flußröhre proportional zum Quadrat des Verhältnisses der Amplitude der Störung, Q , zur Skalenhöhe H_{P_0} , $(Q/H_{P_0})^2$, ist, bzw. proportional zu $(Q/\lambda)^2$ (Anhang B). Diese resultierende Kraft hat dann andererseits eine Anregung der geradlinigen Normalmode zu $k = 0$ zur Folge. Bei genügend schwachem Magnetfeld ist die letztere instabil (s. 5.4); dann kann diese nichtlineare Kopplung zwischen den Eigenschwingungen den Aufstieg der ganzen Flußröhre zur Photosphäre bewirken, sobald man die anfängliche Ruhelage einer beliebigen Störung mit $k \neq 0$ aussetzt, und zwar wenn die zu k gehörenden Normalmoden entweder stabil sind oder instabil mit einer Anwachsrate, die genügend klein verglichen mit der der Normalmode zu $k = 0$ ist. Ein typisches Beispiel, nämlich $B = 10^4 \text{ G}$, $\phi = 10^{21} \text{ Mx}$, $Q = H_{P_0}/20$, $\lambda = 7.2 H_{P_0}$ in einer Tiefe $z_0 = 1.88 \cdot 10^5 \text{ km}$ - instabile Normalmoden gibt es in diesem Fall für alle $\lambda > 7.4 H_{P_0}$ - wurde numerisch berechnet; seine zeitliche Entwicklung kann in Abb. 5.3 verfolgt werden. Bald nach Verlassen des Anfangsniveaus z_0 gewinnt der konvektive Auftrieb (s. IV.1) die Oberhand über alle anderen Kräfte und bestimmt ab dann den weiteren Aufstieg; die Aufstiegszeit ist $\tau_A = 1.52 \cdot 10^7 \text{ sec}$. Bei den anderen schnell aufsteigenden Fällen des letzten Kapitels - denjenigen nämlich, die anfänglich im thermischen Gleichgewicht waren - ist ein ähnliches Verhalten zu erwarten: auch wenn sie Störungen endlicher Wellenlänge ausgesetzt würden, würden sie als Ganzes aufsteigen, eventuell mit einer überlagerten Schwingung bzw. wachsenden Störung endlicher Wellenlänge.

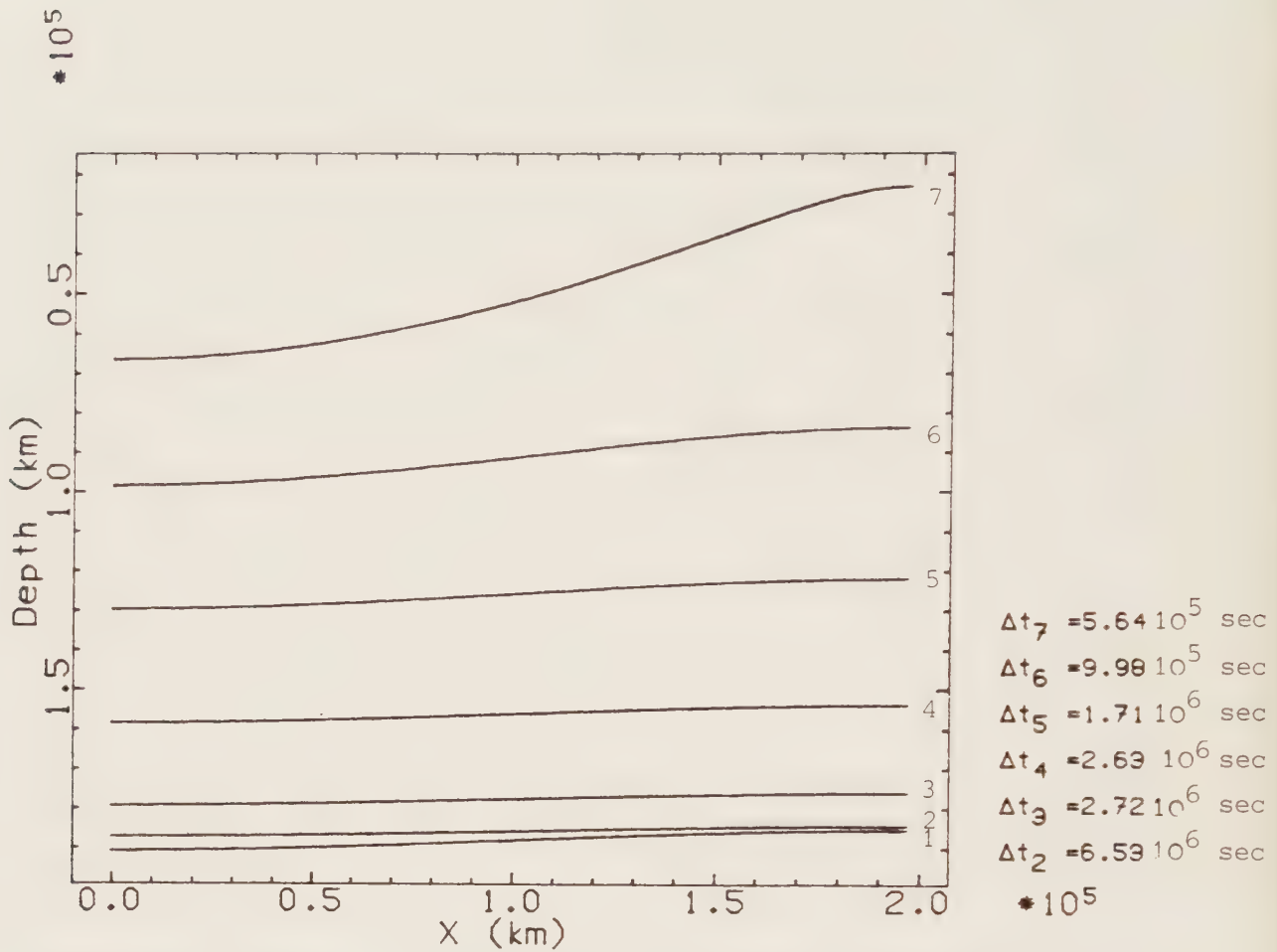


Abb. 5.3 - Zeitliche Entwicklung einer Flußröhre mit $B_0 = 10000 \text{ G}$, $\phi = 10^{21} \text{ Mx}$ anfänglich in einer Tiefe $z_0 = 1.88 \cdot 10^5 \text{ km}$ nach einer sinusförmigen Störung der Amplitude $5 \cdot 10^{-2} H_{p0}$ und Wellenlänge $7.2 H_{p0}$. Auf der rechten Seite sind die Zeitabstände zur jeweils vorhergehenden Kurve eingetragen.

Die Berechnung der Entwicklung von Knickinstabilitäten in all diesen Fällen würde also kein wesentlich neues Verhalten aufzeigen. Die Flußröhren, bei denen die Normalmode zu $k = 0$ stabil ist, zeigen im Gegensatz dazu einen sehr langsamen quasistatischen Aufstieg als horizontale Flußröhren; vgl. Abb. 4.4, $\phi = 10^{22} \text{ Mx}$, $B > 10^{4,5} \text{ G}$. Jede globale Dichteabnahme der Flußröhre führt sie nur zu einem ein wenig höheren Niveau, wo sie liegenbleibt. Eine weitere globale Bewegung der Flußröhre nach oben kann dann nur durch thermischen Austausch erfolgen, also sehr langsam im Vergleich zur Zeitskala der Entfaltung der Knickinstabilität. Eine anfängliche Störung endlicher Wellenlänge, die einer instabilen Normalmode entspricht, kann sich also voll entfalten, ohne daß die ganze Flußröhre die Konvektionszone verläßt.

In diesem Kapitel wird ein solcher Prozeß anhand von numerischen Rechnungen erörtert. In V.2 wird der sinkende Teil der Flußröhre behandelt, sein Eindringen in den radiativen Kern, seine Lagerung in demselben und die Stabilität der resultierenden Konfiguration. V.3 befaßt sich mit der weiteren Entwicklung des aufsteigenden Teiles bis kurz vor Erreichen der Photosphäre sowie mit der Zeitskala des gesamten Vorganges.

2. Der Eintritt von magnetischem Fluß in den radiativen Kern.

Im Vergleich mit der quasiadiabatischen Schichtung der unteren Konvektionszone nimmt die Entropie in der ersten Druckskalenhöhe des radiativen Kernes sehr steil mit der Tiefe ab. Jede Flußröhre, die mit einem Dichteüberschuß in den radiativen Kern eindringt, wird deshalb sehr bald leichter als ihre Umgebung, und ihr weiteres Absinken wird gestoppt. Betrachten wir eine horizontale Flußröhre mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\dot{z}_0$ und einem anfänglichen Dichteüberschuß Δ_0 am Übergang zwischen der Konvektionszone und dem radiativen Kern, $z_0 = z_{cz} = 1.98 \cdot 10^5 \text{ km}$,

$$\Delta_0 = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_i} \right) \quad z = z_0 = z_{cz} \quad .$$

Bei z_{cz} ist die Entropie maximal, δ ist also Null: $\delta(z_{cz}) = 0$.

Wenn $\dot{z}_0 > 0$, muß die Flußröhre in den Kern absinken. Um eine grobe Abschätzung des tiefsten für die Flußröhre erreichbaren Niveaus zu erhalten, benutzen wir Gl. 4.7:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_i} = - \frac{1}{\gamma \beta} - \frac{\Delta S}{c_p} \quad , \quad (5.5)$$

$$\text{mit } \left(\frac{\Delta S}{c_p} \right)_0 = \frac{S_{io} - S_{eo}}{c_p} = - \frac{1}{\gamma \beta_0} - \Delta_0 \quad , \quad (5.6)$$

so daß bei adiabatischer Entwicklung in jeder erreichten Tiefe gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho}{\rho_i} &= - \frac{1}{\gamma \beta} - \left(\frac{\Delta S}{c_p} \right)_0 + \frac{S_e(z) - S_{eo}}{c_p} \\ &= - \frac{1}{\gamma \beta_0} \left(\frac{\beta_0}{\beta} - 1 \right) + \Delta_0 + \frac{S_e(z) - S_{eo}}{c_p} \quad . \end{aligned} \quad (5.7)$$

Mit $\beta/\beta_0 \approx \left(\frac{p_e}{p_{eo}} \right) \left(\frac{\rho_{eo}}{\rho_e} \right)^2$, (4.12), ist die rechte Seite dieser Gleichung eine reine Funktion von z . Die Bewegung der Flußröhre gehorcht dann einer Gleichung der Form

$$\ddot{z} = g \frac{\Delta \rho}{\rho_i} \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{d\phi(z)}{dz}, \quad (5.8)$$

woraus ein Erhaltungsgesetz folgt:

$$\frac{1}{2} \dot{z}^2 + \phi = \text{const.} \quad (5.9)$$

Addiert man nun zu ϕ eine Konstante, so daß $\phi(z_0) = -\frac{1}{2} \dot{z}_0^2$, so hat man $(\frac{1}{2} \dot{z}^2 + \phi)_{z=z_0} = 0$; die Flußröhre wird bis zu einer Tiefe z_B eindringen, wo ebenfalls

$$\frac{1}{2} \dot{z}^2 + \phi(z_B) = 0$$

gilt. Da dort $\dot{z} = 0$ ist, muß auch $\phi(z_B) = 0$ gelten.

Die Eindringtiefe ist dann eine Nullstelle des Potentials ϕ . Um das Potential ϕ zu bestimmen, benutzen wir die Beziehung

$$\frac{S_e(z) - S_{e0}}{c_p} = \int_{z_0}^z \delta \, d \ln p = \int_{z_0}^z \frac{\delta}{H_p} \, dz. \quad (5.10)$$

Für $|\delta/H_p|$ kann man als erste Näherung ein quadratisches Wachstum mit der Tiefe annehmen entsprechend der kleinsten nichtverschwindenden Ordnung in einer Taylor-Reihenentwicklung mit $(\delta/H_p)_{z=z_0} = 0$ und Anpassung der ersten Ableitung an die (δ/H_p) -Verteilung der Konvektionszone:

$$\delta/H_p \sim K(z-z_0)^2 \quad \text{mit } K < 0 \quad \text{und } z \geq z_0. \quad (5.11)$$

$p_e/p_{e0} (\frac{\rho_{e0}}{\rho_e})^2$ wird durch die Näherungsformel $\exp((z-z_0)/H_p - 2(z-z_0)/H_p)$ ersetzt; H_p bezeichnet die Dichteskalenhöhe. $\phi(z)$ hat dann folgende Form:

$$\phi(z) = g \left\{ \frac{H_p}{\gamma \beta_0} \left[\alpha \left(\exp \left(\frac{z-z_0}{\alpha H_p} \right) - 1 \right) - \frac{z-z_0}{H_p} \right] - \Delta_0 (z-z_0) - \frac{K(z-z_0)^4}{12} \right\} \\ - \frac{1}{2} \dot{z}_0^2, \quad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{2H_p}{H_\rho} - 1 \right)^{-1}.$$

Eindringtiefe $z_B - z_O$ einer Flußröhre in den radiativen Kern.

Die Flußröhre befindet sich anfänglich am Boden der Konvektionszone, $z_{CZ} = 1.98 \cdot 10^5$ km, mit einem Dichteüberschuß Δ_O und einer Geschwindigkeit $\dot{z}_O$.

$$\dot{z}_O = \frac{v_A}{5}, \Delta_O = 0$$

$$\dot{z}_O = \frac{v_A}{50}, \Delta_O = 0$$

$$\dot{z}_O = 0, \Delta_O = \frac{1}{\gamma\beta_O}$$

$$\dot{z}_O = 0, \Delta_O = \frac{1}{5} \frac{1}{\gamma\beta_O}$$

B= $10^{4.5} G$ $10^5 G$ $10^6 G$

$1.2 \cdot 10^3$ km	$2.1 \cdot 10^3$ km	$6.6 \cdot 10^3$ km
$3.8 \cdot 10^2$ km	$6.6 \cdot 10^2$ km	$2.0 \cdot 10^3$ km
$8.1 \cdot 10^2$ km	$1.7 \cdot 10^3$ km	$8.0 \cdot 10^3$ km
$4.7 \cdot 10^2$ km	$1.0 \cdot 10^3$ km	$4.7 \cdot 10^3$ km

Das tiefste für die Flußröhre erreichbare Niveau, z_B , erfüllt dann folgende Gleichung:

$$-\frac{K(z_B - z_O)^4}{12 \bar{\Delta} H_p} - \left(1 + \frac{\Delta_O}{\bar{\Delta}}\right) \frac{z_B - z_O}{H_p} + \alpha \left[\exp \left(\frac{z_B - z_O}{\alpha H_p} \right) - 1 \right] = \gamma \left(\frac{\dot{z}_O}{v_A} \right)^2,$$

wo $\bar{\Delta} = \frac{1}{\gamma \beta_O}$.

Nimmt man Werte für $p_e(z_{cz})$, $H_p(z_{cz})$, $H_o(z_{cz})$ und K aus einem Konvektionszonenmodell,

$$\begin{aligned} K &= -8.18 \cdot 10^{-15} \text{ km}^{-3} & H_p(z_{cz}) &= 5.67 \cdot 10^4 \text{ km} \\ p_e(z_{cz}) &= 6.66 \cdot 10^{13} \text{ erg/cc} & H_o(z_{cz}) &= 9.44 \cdot 10^4 \text{ km,} \end{aligned}$$

so ergeben sich für verschiedene Werte von β_O , $\frac{\dot{z}_O}{v_A}$ und Δ_O die in der Tabelle 5.1 aufgeführten Werte von $z_B - z_O$.

Nach dieser Abschätzung wird also eine horizontale Flußröhre von 10^5 G nicht viel tiefer als einige 1000 km in den radiativen Kern eindringen. In diesem vereinfachten Modell würde diese Flußröhre nach Erreichen der Tiefe z_B wieder zur Konvektionszone aufsteigen; bei nichtverschwindender Anfangsgeschwindigkeit würde sie darauf den Kern verlassen. Die allgemeine zweidimensionale Bewegung einer in den Kern eindringenden Flußröhre wird aber noch durch andere Effekte beeinflusst wie z.B. durch die magnetische Krümmungskraft, die Abwärtsströmung entlang den Feldlinien und den Mediumswiderstand. Das Zusammenwirken all dieser Faktoren kann man am besten durch die numerische Lösung der Gleichungen verstehen, der wir uns im nächsten Absatz zuwenden.

Tabelle 5.2 Werte verschiedener physikalischer Größen im anfänglichen Gleichgewichtszustand der im Text behandelten Flußröhren und der Konvektionszone im Anfangsniveau z_0 .

$$\begin{aligned}
 z_0 &= 1.88 \cdot 10^5 \text{ km} \\
 H_{P_0} &= 5.47 \cdot 10^4 \text{ km} \\
 \delta_0 &= 6.14 \cdot 10^{-8} \text{ km} \\
 p_{e0} &= 5.58 \cdot 10^{13} \text{ erg cm}^{-3} \\
 \rho_{e0} &= 2.03 \cdot 10^{-1} \text{ gr cm}^{-3}
 \end{aligned}$$

$$\underline{B_0 = 10^5 \text{ G}}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= 1.40 \cdot 10^5 \\
 v_A &= 6.26 \cdot 10^4 \text{ cm sec}^{-1} \\
 v_s &= 2.14 \cdot 10^7 \text{ cm sec}^{-1} \\
 v_T &\sim v_A \\
 T_{\text{ALFVEN}} &= 8.74 \cdot 10^4 \text{ sec}
 \end{aligned}$$

$$|\omega_i|^{-1} (\text{zu } \lambda = 12 H_{P_0}) = 7.55 \cdot 10^5 \text{ sec}$$

$$\underline{B_0 = 10^6 \text{ G}}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= 1.40 \cdot 10^3 \\
 v_A &= 6.26 \cdot 10^5 \text{ cm sec}^{-1} \\
 v_s &= 2.14 \cdot 10^7 \text{ cm sec}^{-1} \\
 v_T &\sim v_A \\
 T_{\text{ALFVEN}} &= 8.74 \cdot 10^3 \text{ sec}
 \end{aligned}$$

$$|\omega_i|^{-1} (\text{zu } \lambda = 12 H_{P_0}) = 8.17 \cdot 10^4 \text{ sec}$$

Wir betrachten im Folgenden stets zwei Fälle parallel, und zwar erstens eine Flußröhre mit einer Feldstärke 10^5 G und einem magnetischen Fluß $\phi = 10^{21} \text{ Mx}$ und zweitens eine Flußröhre mit einer Feldstärke $B = 10^6 \text{ G}$ und ebenfalls $\phi = 10^{21} \text{ Mx}$. Beide befinden sich anfänglich im mechanischen Gleichgewicht mit der Umgebung in einer Tiefe von $z_0 = 1.88 \cdot 10^5 \text{ km}$ am Boden der Konvektionszone und werden durch eine Störung der Form

$$z(x) = z_0 + Q \cos kx ,$$

mit $Q = H_{p0}/20$, $k = 2\pi/\lambda$, $\lambda = 12 H_{p0}$ und $H_{p0} = H_p(z_0)$, aus ihrer Ruhelage gebracht. Die Stabilitätsgrenze für diese Werte von z_0 und B_0 liegt bei $\lambda = 11.4 H_{p0}$ ($B_0 = 10^5 \text{ G}$) bzw. $\lambda = 11.5 H_{p0}$ ($B_0 = 10^6 \text{ G}$); instabile Normalmoden treten nur bei Wellenlängen oberhalb dieser Grenze (s. V.1) auf. Eine der zu $\lambda = 12 H_{p0}$ gehörenden Normalmoden ist dann instabil; ihre Anwachsrate $|\omega_i|$ sowie der Wert anderer physikalischer Größen in dieser Tiefe und für solche Flußröhren ist in Tabelle 5.2 aufgeführt.

In der Abbildungsreihe (5.4) bis (5.9) und (5.12) sind die Position, Geschwindigkeit und andere Größen der Flußröhre als Funktion der Horizontalcoordinate aufgezeichnet, jeweils für einige ausgewählte Zeitpunkte der Entwicklung der Instabilität. Der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Kurven wird am Rande angegeben.*

Abb. 5.4a,b zeigen die augenblickliche Position der Flußröhre zu verschiedenen Zeitpunkten nach der Auslösung der Instabilität und vor Erreichen der letzten Schichten vor der Photosphäre, genauer vor dem Moment, wo der Radius der aufsteigenden Flußröhre in ihrem Gipfelteil zweimal so groß wird wie die lokale Druckskalenhöhe. Die Kreise und Kreuze entlang jeder Kurve bezeichnen einzelne Lagrange-Elemente der Flußröhre, die Bewegung eines festen Kreises oder Kreuzes auf dem Bild veranschaulicht also die Bewegung eines bestimmten Massenelementes.

Unmittelbar nach Beginn der Entwicklung setzt eine Abwärtsströmung entlang der geneigten Teile der Flußröhre ein (vgl. Parker 1955a, Schüssler 1980), die etwa eine Größenordnung langsamer als die Alfvén-Geschwindigkeit ist. Nach einer kurzen Anstiegszeit, wo beide stabile und instabile Moden vergleichbare Amplituden besitzen, gewinnt die instabile Mode die Oberhand, und die Amplitude der Störung wächst unaufhaltsam; der untere Teil erreicht den Übergang Konvektionszone-radiativer Kern, - gestrichelte Linie in der Abbildung - und dringt in den letzten ein.

*In den Rechnungen dieses und des nächsten Kapitels ist der aerodynamische Widerstand ((2.35) mit $C_D = 1$) als Mediumswiderstand angenommen.

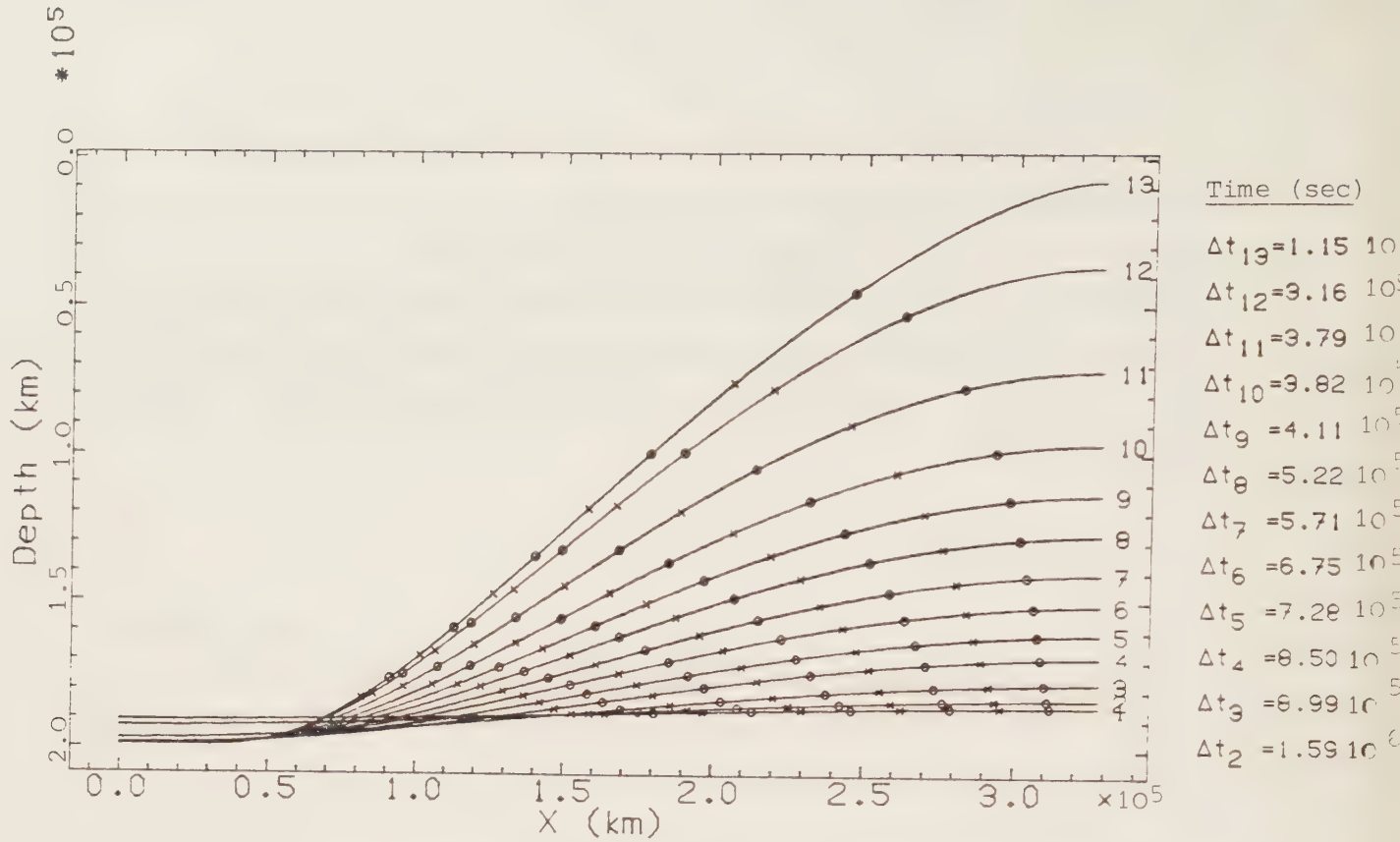


Abb. 5.4a: $B_0 = 10^5$ G

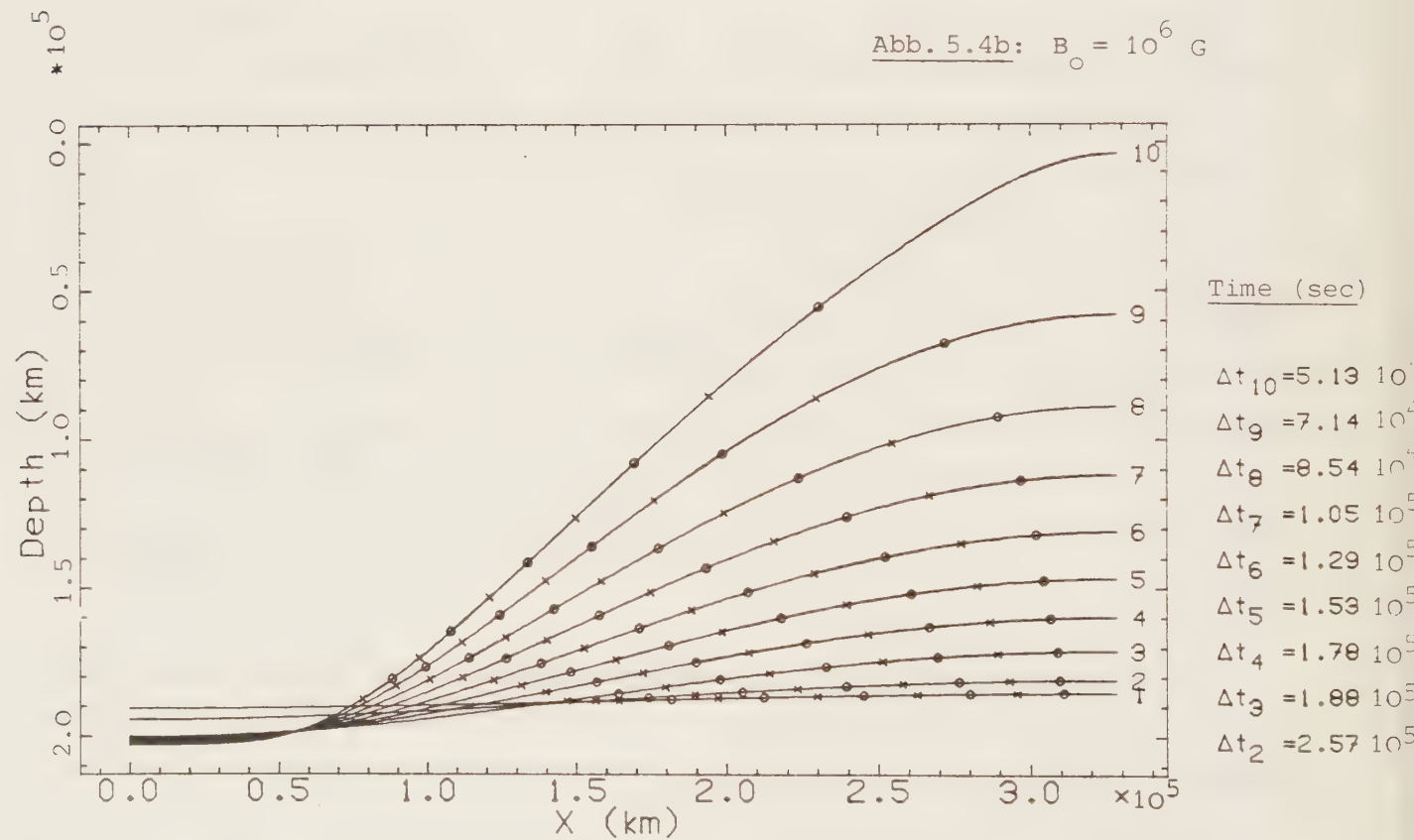


Abb. 5.4b: $B_0 = 10^6$ G

Abb. 5.4a,b - Zeitliche Entwicklung einer Flußröhre mit $B_0 = 10^5$ G (oberes Bild) bzw. $B_0 = 10^6$ G (unteres Bild) und $\phi = 10^{21}$ Mx anfänglich in einer Tiefe $z_0 = 1.88 \cdot 10^5$ km nach einer sinusförmigen Störung der Amplitude $0.05 H_{p0}$ und Wellenlänge $12 H_{p0}$. Auf der rechten Seite sind die Zeitabstände zur jeweils vorhergehenden Kurve eingetragen. Kreise und Kreuze bezeichnen feste Lagrange-Elemente der Flußröhre.

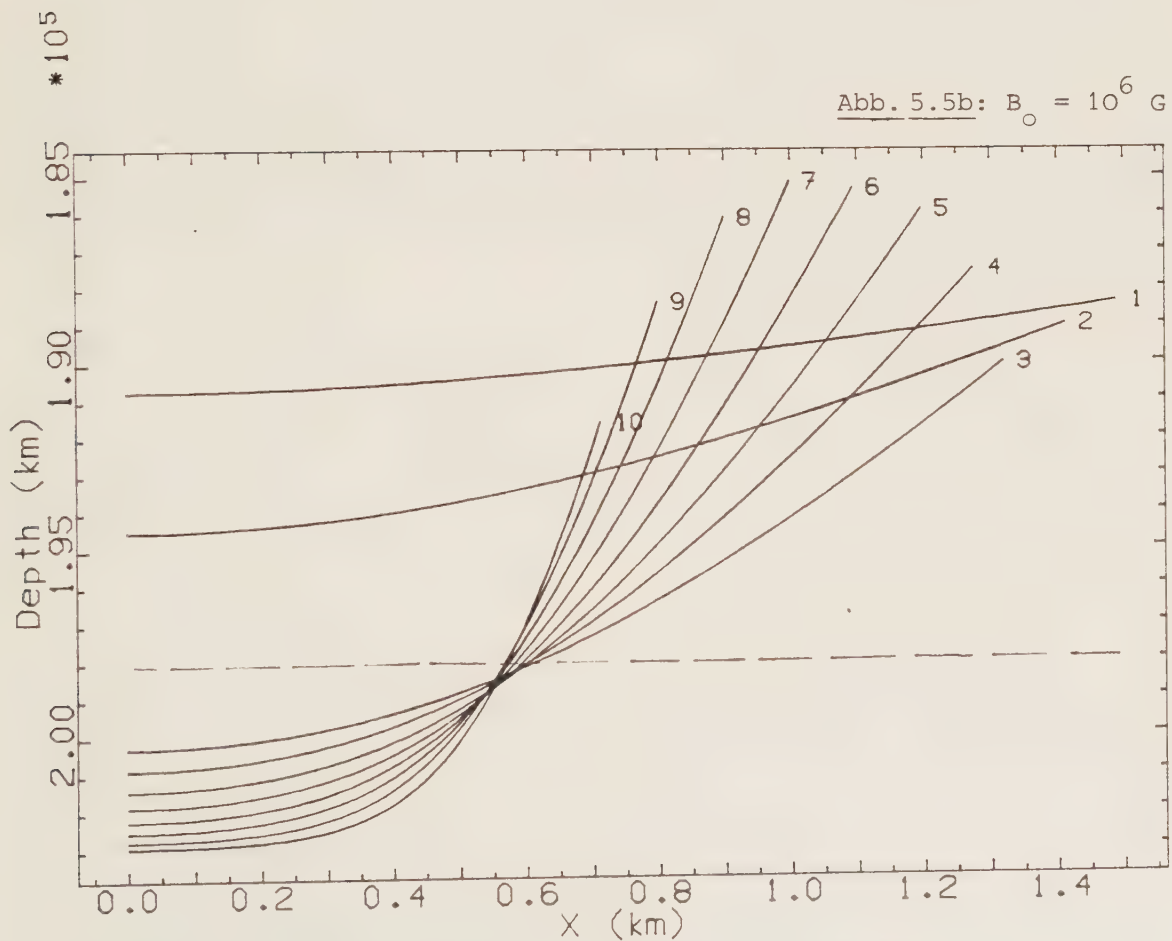
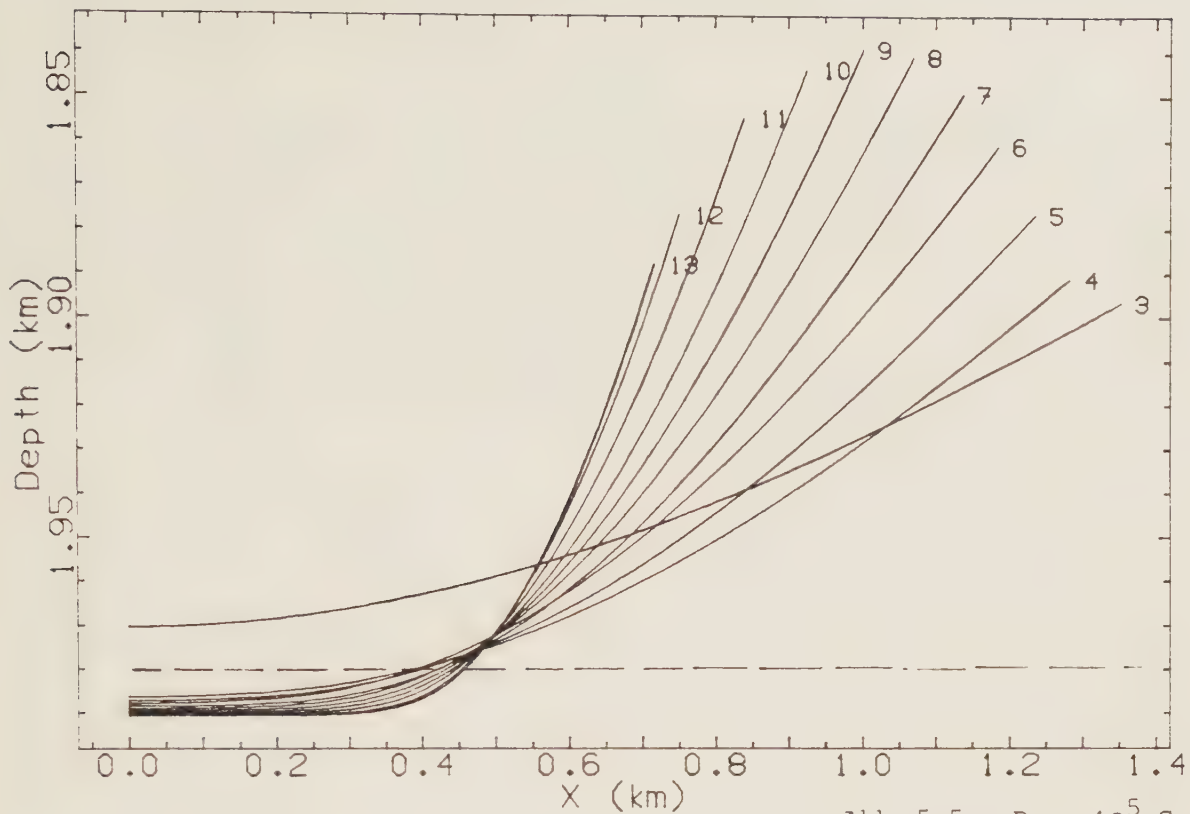


Abb. 5.5a,b : Ausschnitt aus Abb.5.4a,b; Eindringen des sinkenden Flußröhrenteils in den radiativen Kern. Der obere Rand der Kurve stellt ein festes Lagrange-Element dar. Die gestrichelte Linie in der Abbildung entspricht dem Übergang Konvektionszone - radiativer Kern. Man bemerke die zunehmende Einebnung des unteren Teiles.

In Abb. 5.5 a,b sieht man eine Vergrößerung des sinkenden Teils der Flußröhre. Der obere Rand jeder Kurve liegt immer auf derselben Lagrange-Koordinate, die Masse des dargestellten Teilabschnitts der Flußröhre bleibt also konstant. Bald nach Verlassen der Konvektionszone macht sich die starke Entropieabnahme mit der Tiefe in der Umgebung bemerkbar (s. Abb. 5.6, wo die Entropie des äußeren Mediums entlang der Flußröhre bezogen auf ihren Wert in der anfänglichen Höhe z_0 ,

$$\left(\frac{\Delta S}{c_p}\right)_e = \frac{|S_e(z) - S_{e0}|}{c_p},$$

dargestellt wird). Die eintretenden Massenelemente verlieren dementsprechend ihren Dichteüberschuß - s. dazu die linke Seite der Abb. 5.7 -, und das solange bis sich ein Kräftegleichgewicht zwischen der magnetischen Krümmungskraft und dem negativen Auftrieb einstellt :

$$\left|g \frac{\Delta \rho}{\rho_i}\right| \approx \left|\kappa \frac{B^2}{4\pi\rho_i}\right|. \quad (5.15)$$

Bei Annäherung an dieses Gleichgewicht schrumpft die vertikale Geschwindigkeit auf Null. Es stellt sich ein stationäres Regime ein, wobei sich die Flußröhre langsam nach unten weiterbewegt. Das Weitersinken der Röhre und die Stabilität dieser Konfiguration hängen vor allem mit den folgenden zwei Effekten zusammen:

1. Während das untere Ende sich nur sehr langsam bewegen kann, treten immer neue Teile der Flußröhre in den Kern hinein. Dies führt zu einer Verringerung der Krümmung und $\Delta\rho/\rho_i$ muß gemäß (5.15) abnehmen. Das wird ausgeglichen indem ein neues, ein wenig tieferes Niveau angenommen wird mit einem niedrigeren Wert der Außenentropie. Auf diese Weise wird die Flußröhre geradlinig gelagert.

2. Währenddessen strömt auch Materie nach unten entlang den Feldlinien (s. Abb. 5.8), so daß die Massenelemente der Flußröhre im versunkenen Teil näher aneinander rücken. Ein Maß hierfür bietet der Dehnungsfaktor, St ,

$$St \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\frac{ds}{da}}{\left(\frac{ds}{da}\right)_0} = \frac{\xi_0}{\xi}, \quad (5.16)$$

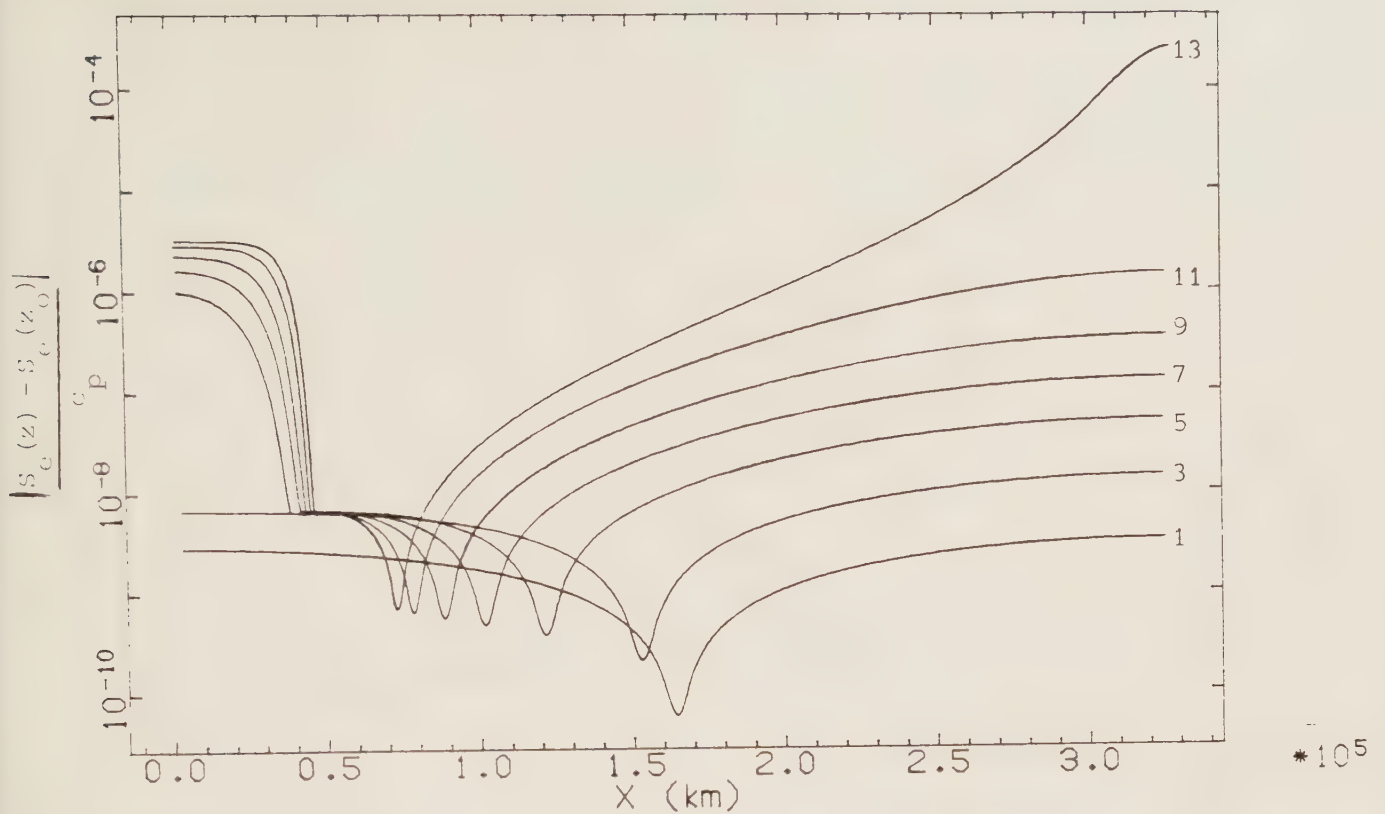


Abb. 5.6: Entwicklung einer instabilen Flußröhre mit $B_0 = 10^5 \text{ G}$ (s. Abb. 5.4a): Entropie im äußeren Medium als Funktion der Horizontalen- koordinate entlang der Flußröhre für einige der in Abb. 5.4a dargestellten Zeiten. Die steile Zunahme von $|\Delta S_e / c_p|$ auf der linken Seite des Bildes geschieht im radiativen Kern. Bezifferung der Kurven nach Abb. 5.4 a

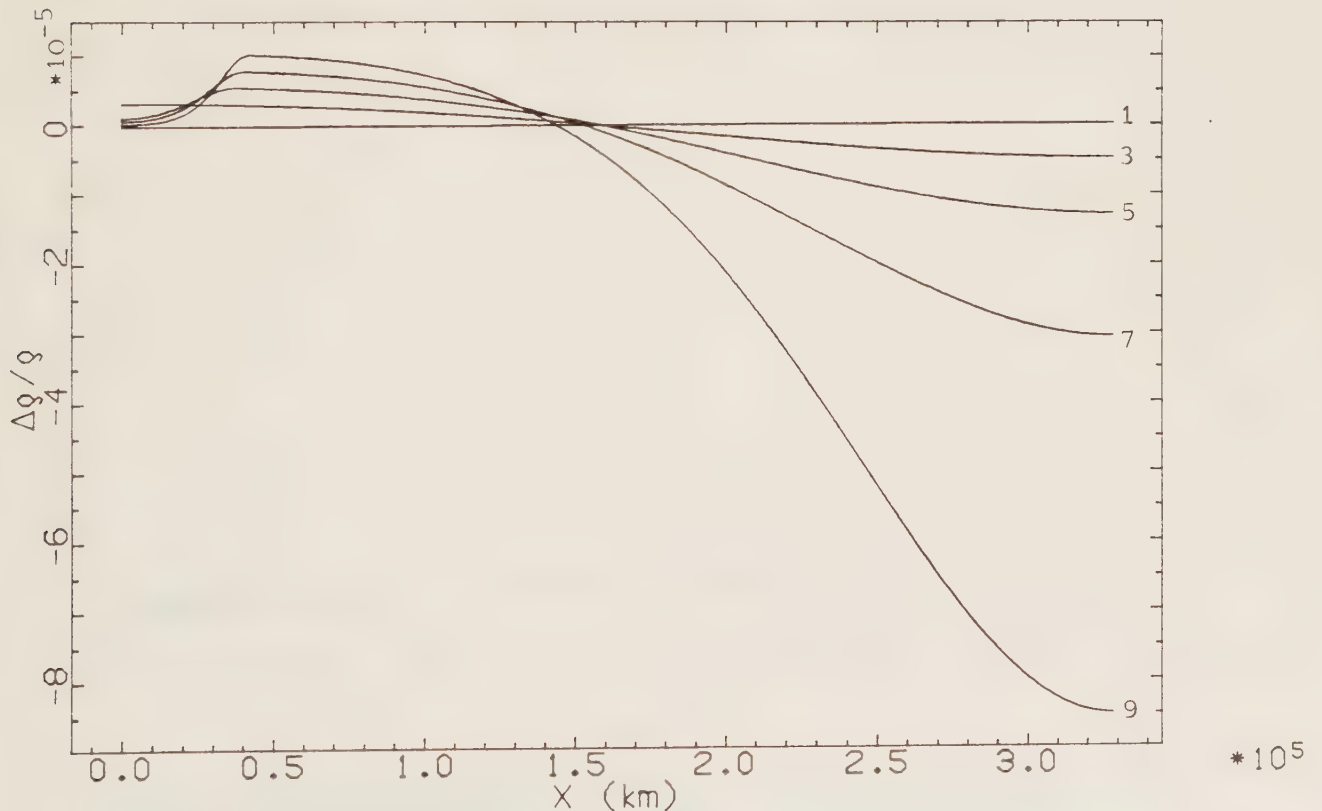
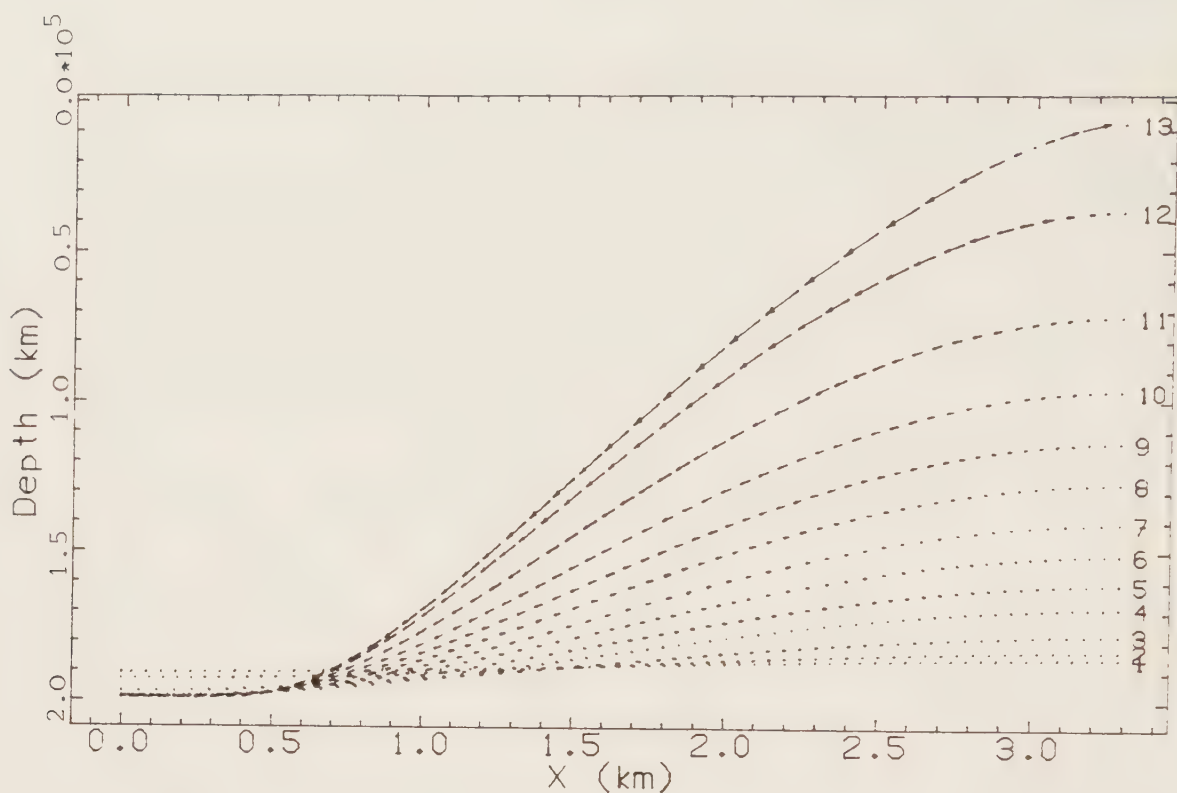


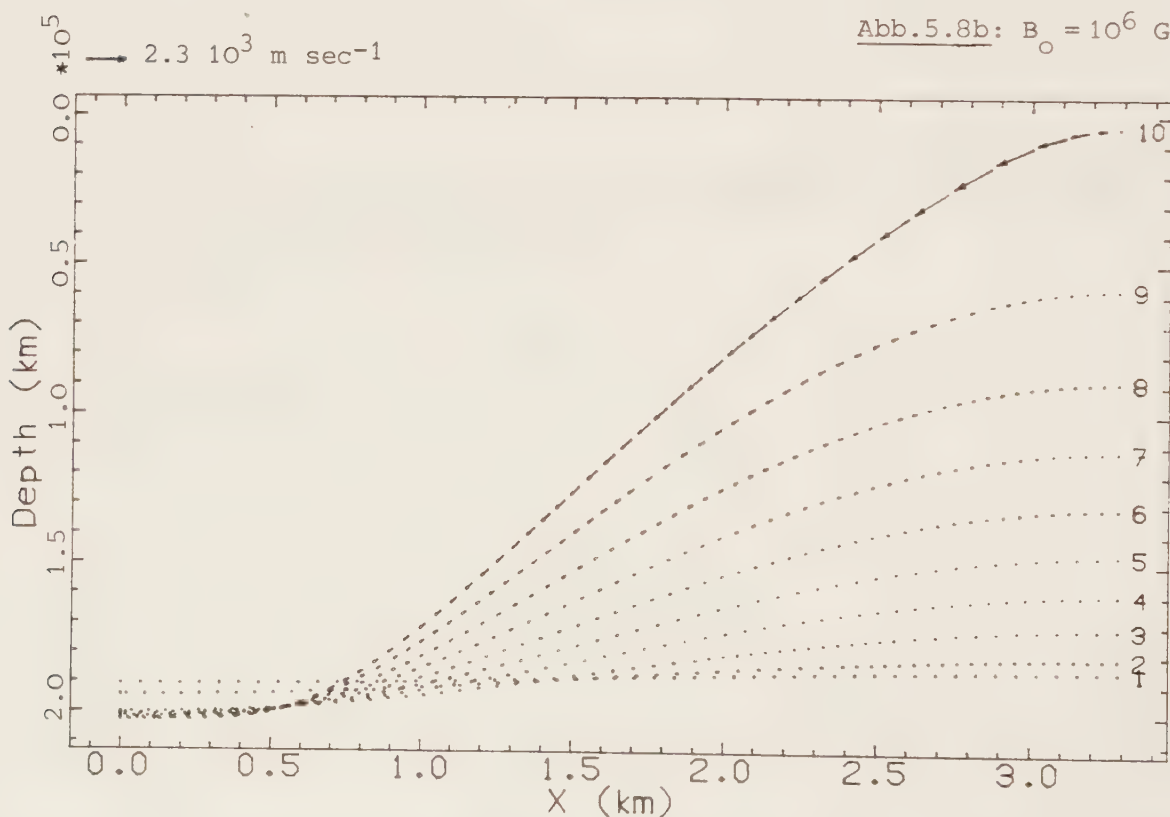
Abb. 5.7: Entwicklung einer instabilen Flußröhre mit $B_0 = 10^5 \text{ G}$ (s. Abb. 5.4a): Relativer Dichteunterschied: $\frac{\Delta \rho}{\rho_i} = \frac{\rho_i}{\rho_e} - 1$ als Funktion der Horizontalen- koordinate entlang der Flußröhre für einige der in Abb. 5.4a dargestellten Zeiten.



→ $1.2 \cdot 10^2 \text{ m sec}^{-1}$

Abb. 5.8a: $B_0 = 10^5 \text{ G}$

$\cdot 10^5$



→ $2.3 \cdot 10^3 \text{ m sec}^{-1}$

Abb. 5.8b: $B_0 = 10^6 \text{ G}$

$\cdot 10^5$

Abb. 5.8 a,b: Zeitliche Entwicklung einer instabilen Flußröhre (s. Abb. 5.4a,b) : Strömung entlang den Feldlinien. Die Pfeillänge ist proportional zur Tangentialkomponente der Flußröhrengeschwindigkeit.

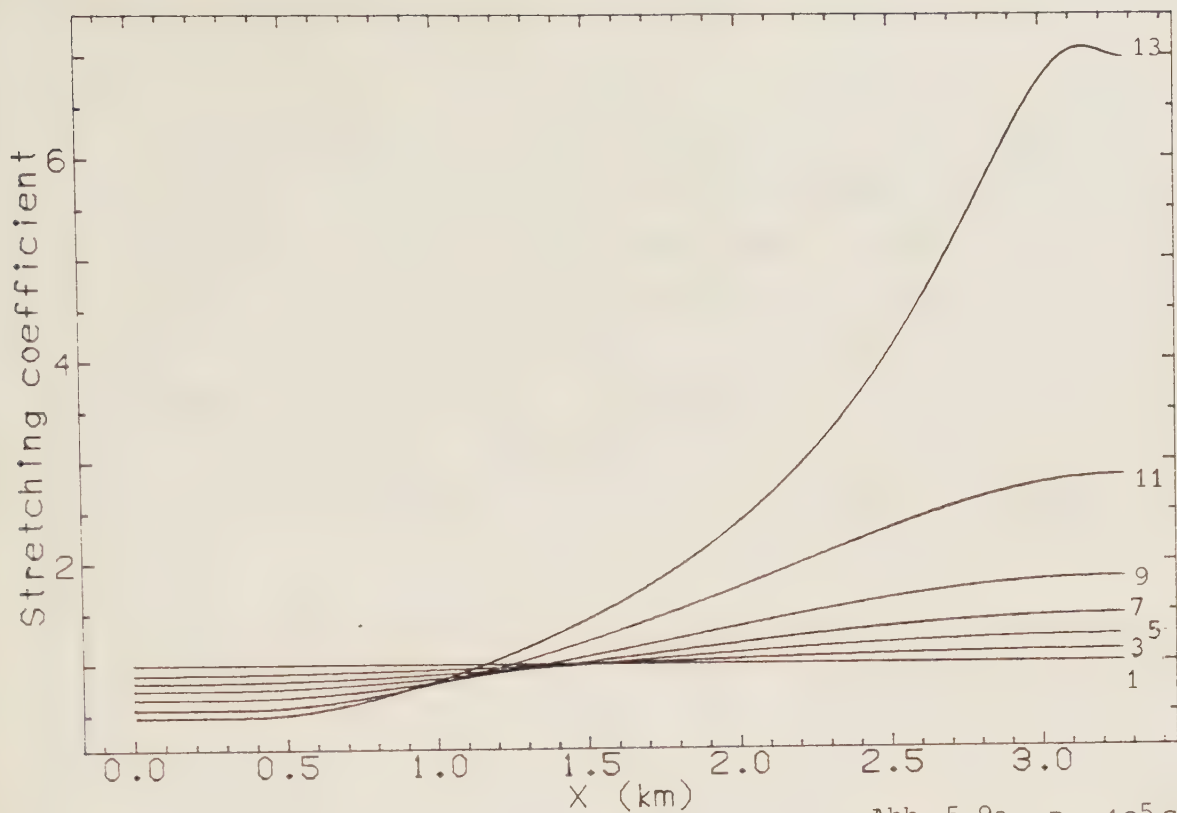
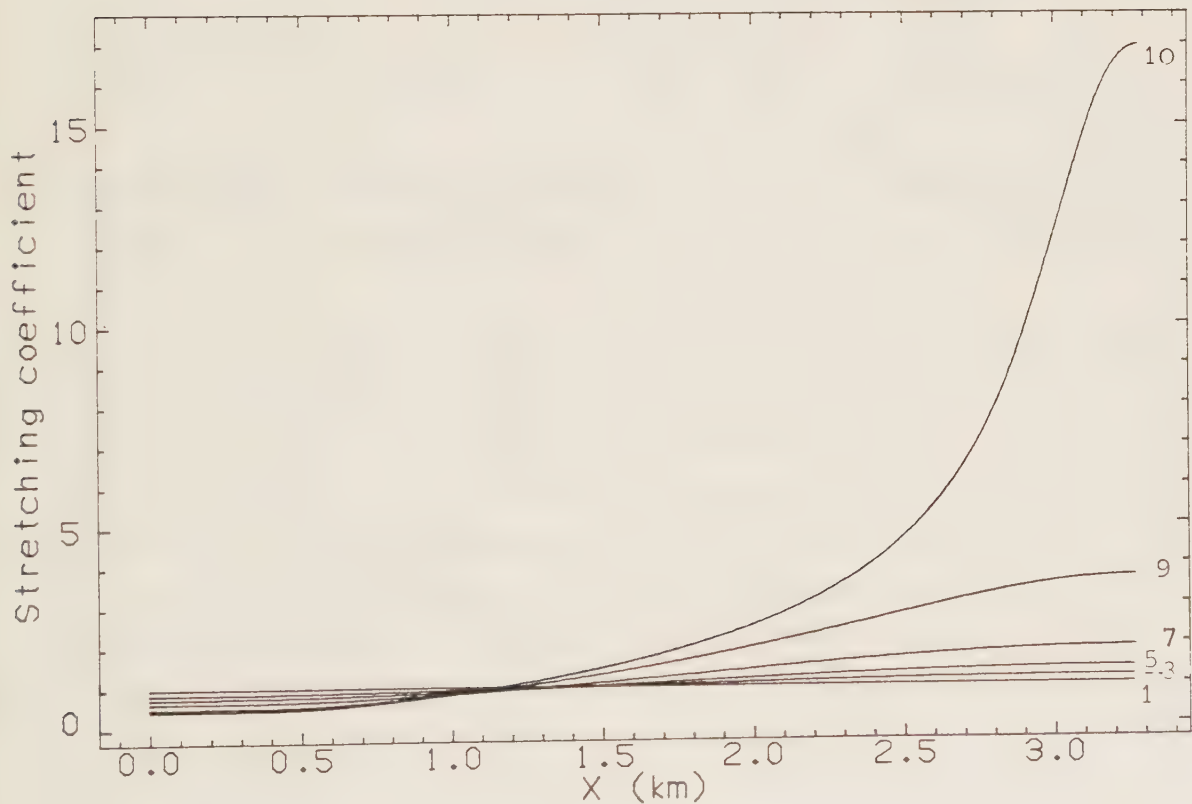


Abb. 5.9a - $B_0 = 10^5 \text{ G}$

$\cdot 10^5$

Abb. 5.9b - $B_0 = 10^6 \text{ G}$



$\cdot 10^5$

Abb. 5.9a,b: Zeitliche Entwicklung einer instabilen Flußröhre (s. Abb. 5.4a,b) : Dehnungskoeffizient, St , d.h. instantane Länge eines Lagrange-Elementes der Flußröhre bezogen auf seine Ausgangslänge. Im betrachteten Zeitraum ziehen sich die untersten Elemente auf die Hälfte zusammen, während die obersten Elemente um einen Faktor 7 bzw. 17 verlängert werden. Bezifferung der Kurven nach Abbildung 5.4a bzw. 5.4b

wo s die Bogenlänge und ξ die Dichte pro Längeneinheit darstellen. Die Verteilung von St entlang der Flußröhre und sein Verlauf mit der Zeit sind in Abb. 5.9 dargestellt. Der Dehnungsfaktor erreicht im Laufe der Zeit im unteren Extrem der Flußröhre Werte bis ≈ 0.5 , d.h. der Abstand zwischen benachbarten Massenelementen verringert sich bis auf die Hälfte. Dies geschieht im wesentlichen nachdem die Flußröhre im Kern eingetreten ist. Infolgedessen muß, erstens, das Magnetfeld, näherungsweise um denselben Faktor schwächer werden, und, zweitens, muß die Flußröhre weitersinken. Denn aufgrund der magnetischen Flußerhaltung gilt

$$B \propto \rho_i / \xi = \frac{\rho_e}{\xi} [1 + O(\frac{\Delta\rho}{\rho})] = \frac{\rho_e}{\xi} [1 + O(\frac{1}{\beta}, \frac{\Delta S}{c_p})] . \quad (5.17)$$

Die Außendichte wird zwar größer mit der Tiefe, ihr Anwachsen ist aber gering im Vergleich zur Zunahme von ξ ; das Magnetfeld muß also ebenfalls um ca. einen Faktor 2 während der Entwicklung schwächer werden (Abb. 5.10). Mit B muß sich auch der magnetische Auftrieb verringern:

$$\left[\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_i} \right)_{\text{magn}} \right]_{z=ct} = - \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{1}{\beta} \right) \right]_{z=ct} = - \frac{B}{4\pi\gamma} \frac{p_e}{p^2} < 0. \quad (5.18)$$

Um das Gleichgewicht (5.15) zu erhalten muß also die Flußröhre weitersinken, damit $\Delta\rho/\rho$ durch die Abnahme der äußeren Entropie wieder genügend klein wird.

Sowohl durch die Abwärtsströmung entlang den Feldlinien wie auch dadurch, daß die äußere Schichtung subadiabatisch ist, wird die Stabilität der versunkenen Flußröhre in den in diesem Abschnitt behandelten ersten Phasen der Rechnung gewährleistet. Der Parameter $\beta\delta$ erreicht dort den Wert $-3.0 \cdot 10^2$ im Fall $B_0 = 10^5 \text{ G}$, was gemäß (5.3) Stabilität gegenüber Störungen aller Wellenlängen bedeutet. Im nächsten Paragraphen wird es sich zeigen, daß diese Effekte hinreichen, um einen wesentlichen Teil der Flußröhre auch während der weiteren Bewegung des aufsteigenden Teils zur Photosphäre unter der Konvektionszone zu speichern.

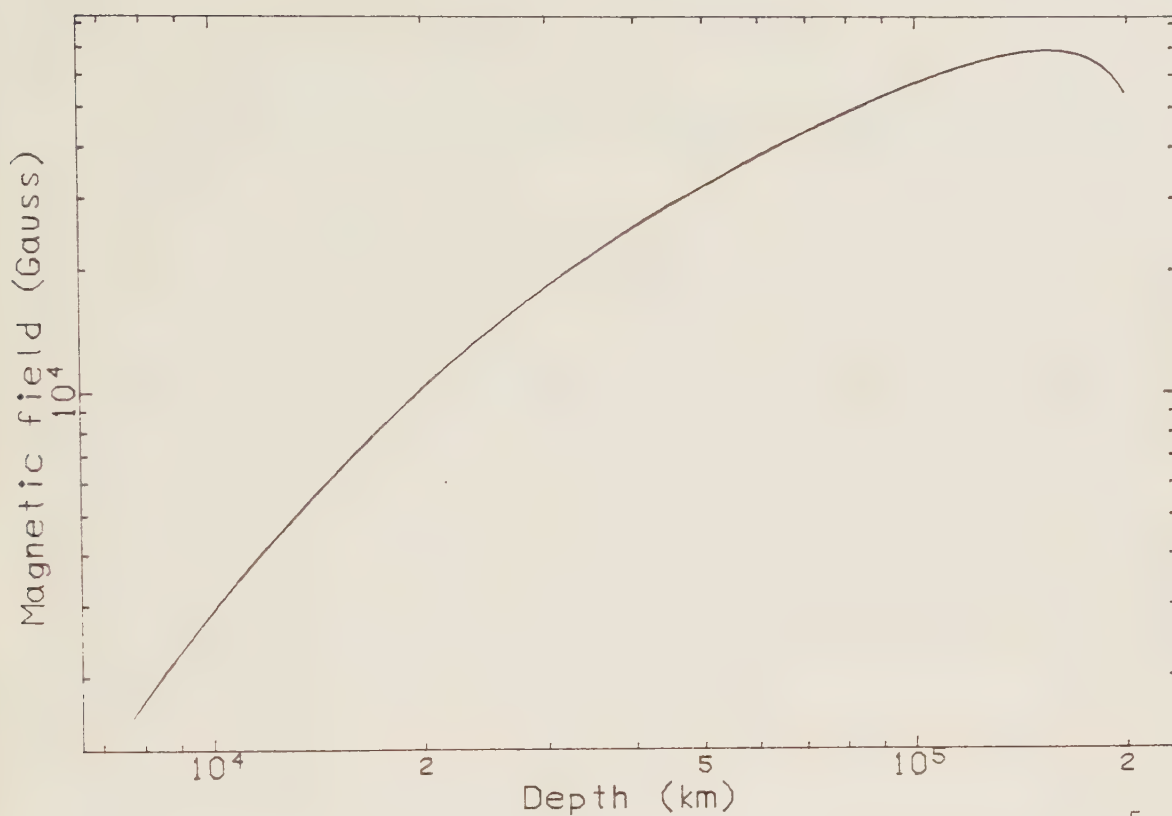


Abb. 5.10a: $B_0 = 10^5 \text{ G}$

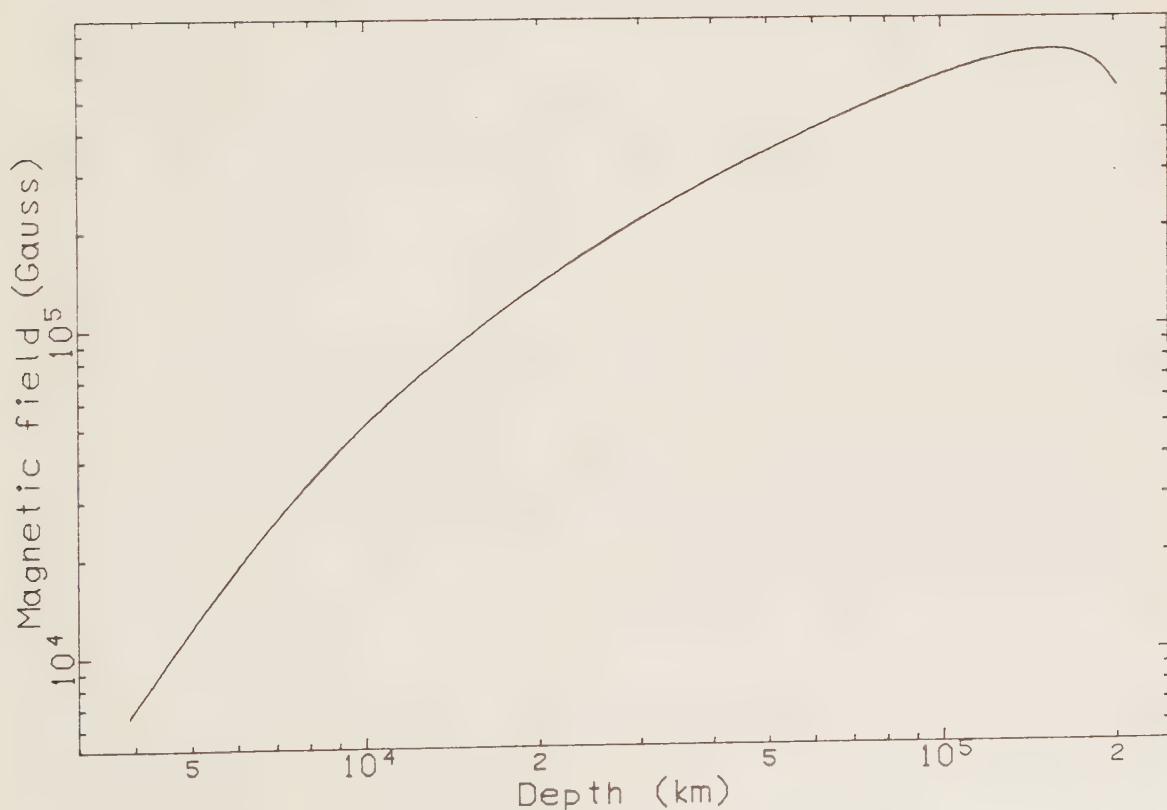


Abb. 5.10b: $B_0 = 10^6 \text{ G}$

Abb. 5.10a,b: Zeitliche Entwicklung einer instabilen Flußröhre (s. Abb. 5.4a,b): Magnetfeldstärke entlang der Flußröhre als Funktion der Vertikalkoordinate z zum letzten berechneten Zeitpunkt, kurz vor dem Ausbruch in der Photosphäre. Bemerke, daß die maximale Feldstärke in der Flußröhre kleiner ist als der anfängliche Wert (10^5 G bzw. 10^6 G).

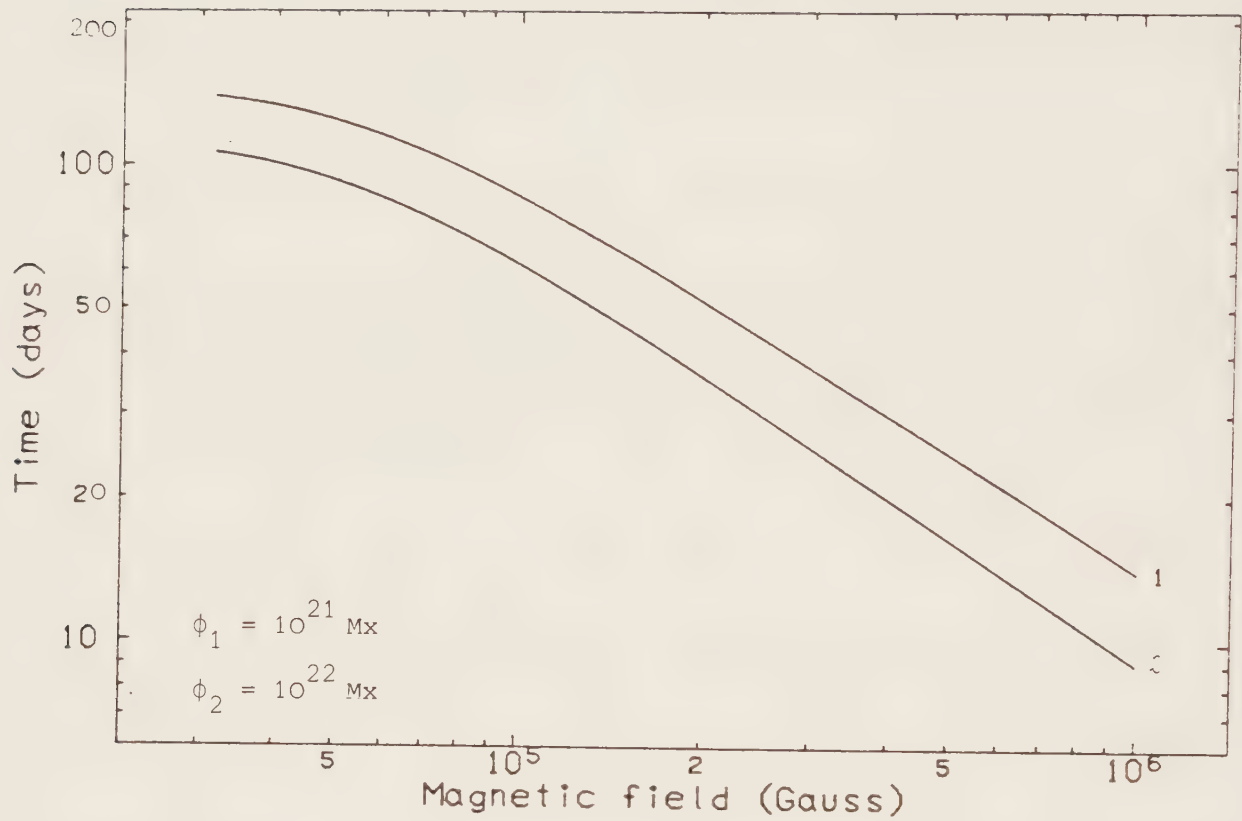


Abb. 5.11: Aufstiegszeit von magnetischem Fluß vom Boden der Konvektionszone zur Photosphäre als Folge der Entwicklung der Knickinstabilität in einer Flußröhre. Die Flußröhre wird anfänglich einer Störung der Amplitude $a=0.05 H_{p0}$ und Wellenlänge $\lambda = 12 H_{p0}$ ausgesetzt. Anfangstiefe: $z_0 = 1.88 \cdot 10^5 \text{ km}$.

3. Der Transport von magnetischem Fluß zur Photosphäre infolge der Instabilität.

Durch die starke Abwärtsströmung und die nach oben immer instabiler werdende äußere Schichtung (s. Abbildung 3.2) begünstigt, gelangt der aufsteigende Teil der Flußröhre in die oberen Schichten der Konvektionszone. In Abb. 5.11 sind die Aufstiegszeiten zur Photosphäre für verschiedene Werte des magnetischen Flußes und $B \geq 10^{4,5}$ Gauß dargestellt. Alle erhaltenen Aufstiegszeiten sind kurz, alle unter einem Jahr, die meisten nur einige wenige Monate. Der Aufstieg ist hier viel schneller als der im vorigen Kapitel besprochene quasistatische Aufstieg (IV.4), denn hier erfolgt er mit einer dynamischen Zeitskala, die im wesentlichen durch die Anwachsrate der ursprünglichen instabilen Normalmode,

$$|\omega| \sim O(T_{\text{ALFVEN}}^{-1}) , \quad T_{\text{ALFVEN}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{H_p}{v_A} , \quad (5.19)$$

und allenfalls die Stärke des Mediumwiderstandes bestimmt wird.

Der Gipfelteil der Flußröhren von Abb. 5.4 hatte im letzten berechneten Zeitpunkt eine Tiefe von $3.9 \cdot 10^3$ km unter der Photosphäre ($B_0 = 10^6$ G, Abb. 5.4b) bzw. $7.7 \cdot 10^3$ km ($B_0 = 10^5$ G, Abb. 5.4a) erreicht. Es zeigt sich, daß die Bewegung in den letzten berechneten Skalenhöhen durch

1. eine rapide Schwächung des Magnetfeldes,
2. hohe Aufstiegsgeschwindigkeiten und
3. eine starke Materieströmung entlang den Feldlinien

charakterisiert ist. Im Rest dieses Abschnittes wollen wir die physikalischen Ursachen für diese Erscheinungen besprechen.

Es sind mehrere Faktoren, die zur Entstehung der Strömung entlang den Feldlinien führen. Die zwei in dieser Richtung wirkenden Kräfte sind Gasdruckgradient und Schwerkraft. Während der ganzen Entwicklung herrscht quasihydrostatisches Gleichgewicht entlang den Feldlinien, so daß

$$|-\partial_s p_i + \rho_i \vec{g} \cdot \vec{\Theta}| \ll |-\partial_s p_i| \approx |\rho_i \vec{g} \cdot \vec{\Theta}| , \quad (5.20)$$

mit $\partial_s \equiv \frac{\partial}{\partial s}$.

Durch Anwendung der Bedingung des seitlichen Druckgleichgewichtes der Flußröhre mit der Umgebung, (2.33), kann man den Ausdruck für die resultierende Kraft wie folgt umformen:

$$\frac{1}{\rho_i} (-\partial_s p_i + \rho_i \vec{g} \cdot \vec{\theta}) = \frac{1}{\rho_i} \partial_s p_m + \frac{\Delta \rho}{\rho_i} \vec{g} \cdot \vec{\theta}, \quad (5.22)$$

wo auf der rechten Seite nur kleine Größen erster Ordnung in $1/\beta$ oder $\Delta S/c_p$ vorkommen, die die Abweichung vom vollkommenen Gleichgewicht darstellen. Durch Differentiation von (2.33) nach der Bogenlänge und Anwendung der Bedingung der Erhaltung des magnetischen Flusses bekommt man

$$\frac{1}{\rho_i} (-\partial_s p_i + \rho_i \vec{g} \cdot \vec{\theta}) = v_T^2 \frac{\partial s \tau}{\tau} + \vec{g} \cdot \vec{\theta} \frac{v_T^2}{v_S^2} \frac{\rho_e}{\rho_i} + \vec{g} \cdot \vec{\theta} \frac{\Delta \rho}{\rho_i}, \quad (5.23)$$

wo τ die Inverse der Dichte pro Längeneinheit, Def. (2.14), (2.16), ist.

In diesem Ausdruck ist die Änderung des magnetischen Druckes entlang der Flußröhre in zwei Komponenten zerlegt. Die erste, $v_T^2 \frac{\partial s \tau}{\tau}$, rührt von der differentiellen Streckung der Flußröhre in **tangentialer** Richtung her und beschreibt im gesamten Gleichungssystem die Ausbreitung von Wellen mit Phasengeschwindigkeit v_T entlang der Flußröhre (vgl. Kap. II). Die zweite Komponente,

$$\vec{g} \cdot \vec{\theta} \frac{v_T^2}{v_S^2} \frac{\rho_e}{\rho_i} \approx \vec{g} \cdot \vec{\theta} \frac{2}{\gamma \beta} \left[1 + O\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right) \right], \quad (5.24)$$

entsteht durch die Abhängigkeit des Magnetfeldes von der Dichte:

$$\left(\frac{\partial \ln B}{\partial \ln \rho} \right)_{\tau = \text{ct}} = 1,$$

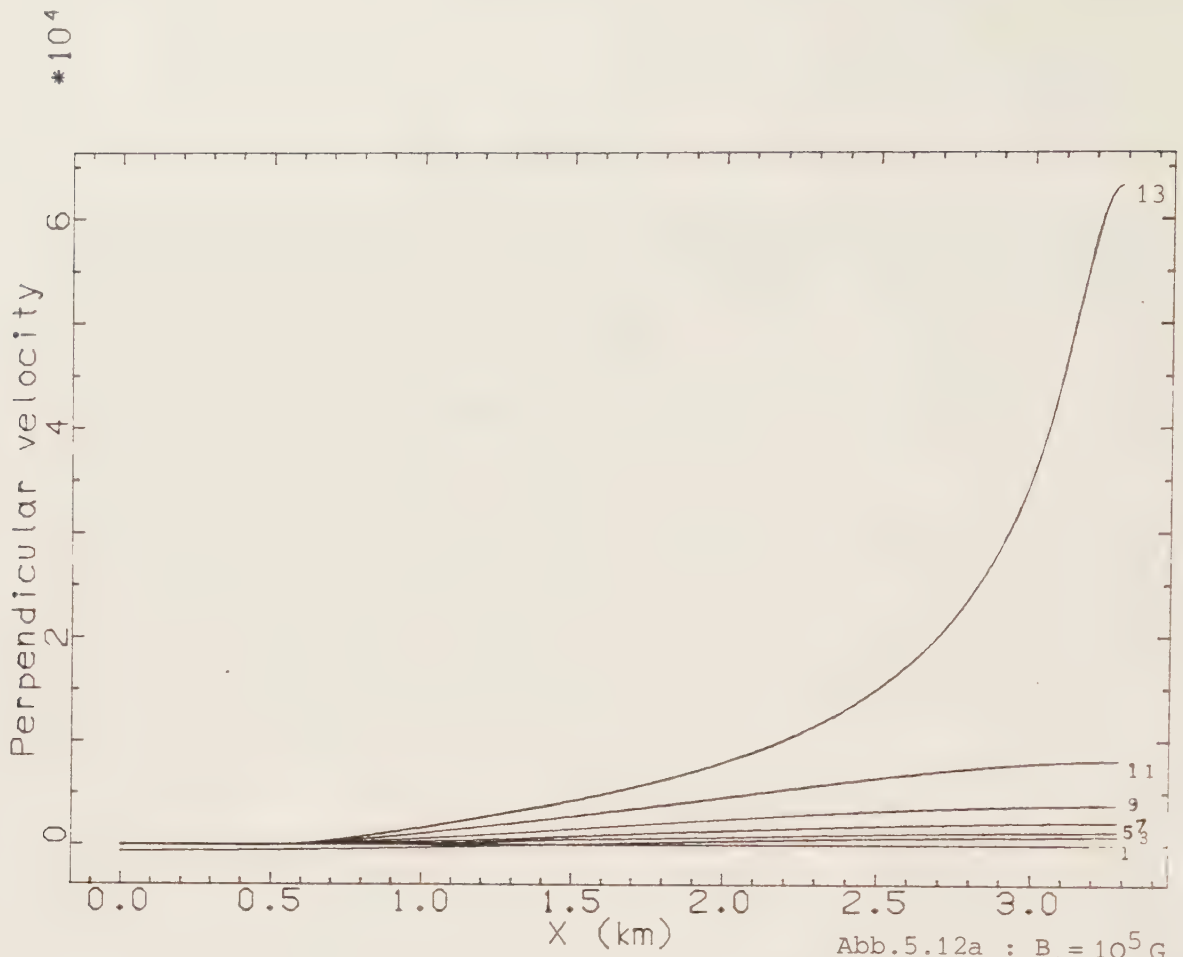
die sich aus der Erhaltung des magnetischen Flusses ergibt; sie beschreibt im wesentlichen die durch die äußere Schichtung bedingte Abnahme des Magnetfeldes mit der Höhe falls τ konstant bleibt, ähnlich wie in einer aufsteigenden horizontalen Flußröhre, wo sich die Feldstärke ebenfalls mit der Höhe verringern muß (vgl. Schüßler 1977). Der dritte Term in (5.23) schließlich ist die gewöhnliche Auftriebskraft.

Der zweite Term in der Zerlegung (5.23) ist stets nach unten entlang den Feldlinien gerichtet, so daß durch ihn immer eine Abwärtsströmung hervorgerufen wird. Das hängt mit der Tatsache zusammen, daß eine Abnahme der Feldstärke mit der Höhe eine Schwächung des inneren Gasdruckgradienten gegenüber dem äußeren zur Folge hat. In den anfänglichen Phasen der Instabilitätsentwicklung ist dieser Term wichtiger als die anderen zwei, so daß am Anfang eine Abwärtsströmung einsetzt, die ihrerseits eine Verdünnung der oberen Teile der Flußröhre (Parker 1955a, Schüßler 1980, Spruit und Van Ballegooijen 1982) sowie eine mit der Höhe zunehmende Dehnung derselben bewirkt. Beides Verdünnung und Dehnung widersetzen sich gemäß (5.23) der Abwärtsströmung, und es kommt bald nach Auslösung der Instabilität zum dynamischen Gleichgewicht zwischen den drei Termen von (5.23), das während des größten Teiles des Aufstieges fortbesteht.

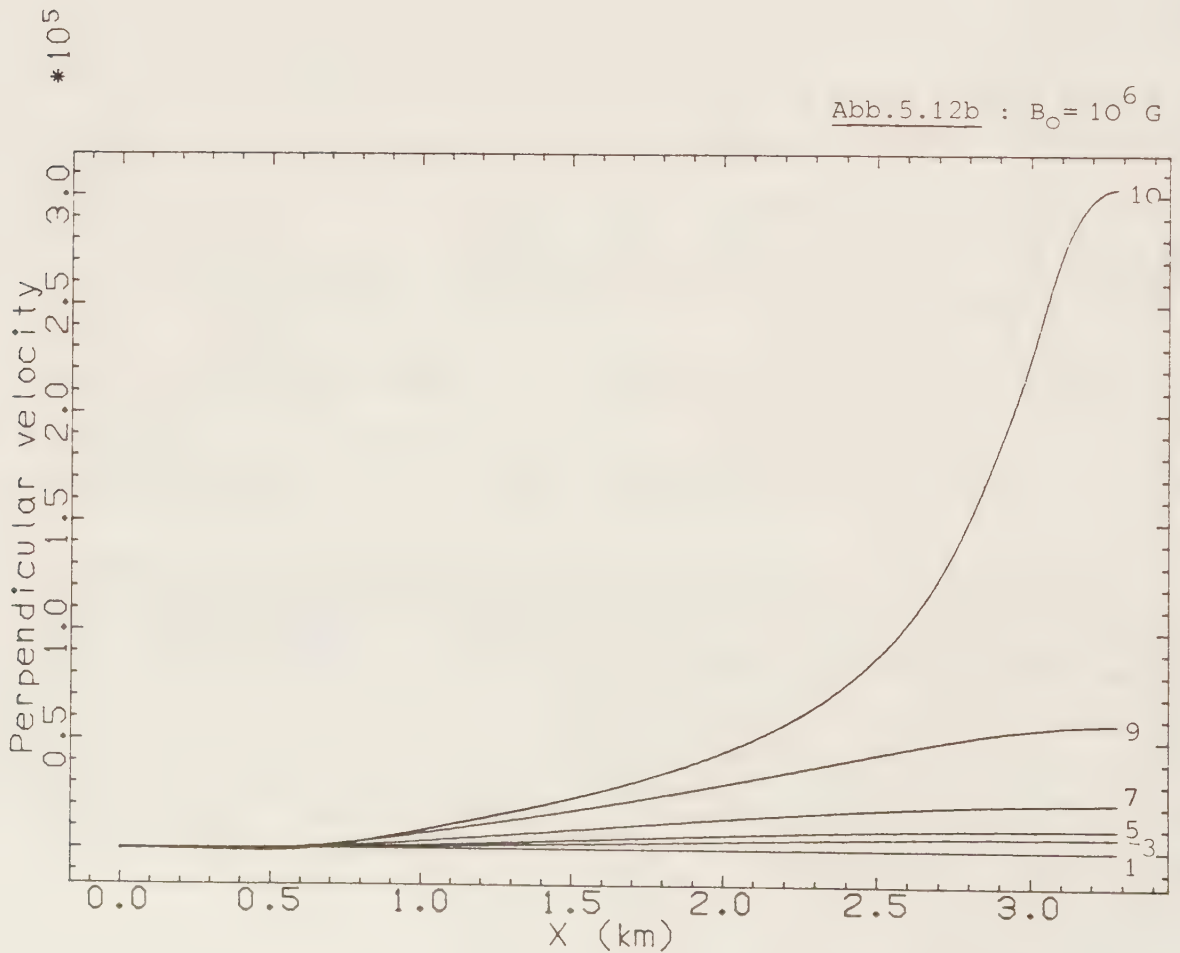
Wenn die Flußröhre in die obere Hälfte der Konvektionszone gelangt ist, erreicht die Abwärtsströmung maximale Geschwindigkeiten von 0.1 km/sec in einer Tiefe von $5 \cdot 10^4$ km im Fall $B_0 = 10^5$ G bzw. 2 km/sec bei $z = 1.6 \cdot 10^4$ km für $B_0 = 10^6$ G (s. Abb. 5.8); damit verbunden ist eine nach oben wachsende Dehnung der Flußröhre, wie die oberste Kurve der Abb. 5.9 zeigt.

In den letzten 10000 km vor der Photosphäre ist die Schichtung der Konvektionszone stark überadiabatisch (s. Abb. 3.2). Der konvektive Term in 5.5 wächst dort schnell an, und die Materie in der Flußröhre erfährt einen starken Auftrieb. Nach (5.23) bewirkt dies eine Verringerung der Abwärtsströmung in dieser Höhe. In noch höheren Niveaus wird der Auftriebsterm vorherrschend und kann sogar bei schwächeren Feldern $B_0 \leq 10^5$ G eine Aufwärtsströmung hervorrufen. Im Fall $B_0 = 10^6$ G tritt dagegen bis zu dem letzten berechneten Zeitpunkt keine Aufwärtsströmung auf, und ebenfalls bis dahin bleibt der magnetische Anteil an $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ vergleichbar mit dem konvektiven.

Der Auftriebsterm bestimmt auch die Dynamik senkrecht zur Flußröhre in den letzten Skalenhöhen vor der Photosphäre. In den beiden berechneten Fällen wird die magnetische Krümmungskraft dort eine oder zwei Größenordnungen kleiner als die Auftriebskraft. Daraus ergeben sich Aufstiegsgeschwindigkeiten von 0.6 km/sec im Fall $B_0 = 10^5$ G und 3 km/sec bei $B_0 = 10^6$ G, beide in einer Tiefe von 7700 km (Abb. 5.12). Sie sind größer als die typische konvektive Geschwindigkeit in dieser Höhe, 0.4 km/sec für $z = 7500$ km (Spruit 1977).



*10⁵



*10⁵

Abb. 5.12 a,b : Zeitliche Entwicklung einer instabilen Flußröhre (s. Abb. 5.4a,b): Geschwindigkeit der Flußröhre senkrecht zu sich selbst als Funktion der Horizontalkoordinate.

Mit dem schnellen Aufstieg durch die letzten Tausende km geht eine rapide Schwächung des Magnetfeldes einher, s. Abb. 5.10; im Fall $B_0 = 10^5 \text{ G}$ z.B. nimmt $1/\beta$ um einen Faktor 2 ab von einer Tiefe $z = 2.0 \cdot 10^4 \text{ km}$ bis $z = 7.7 \cdot 10^3 \text{ km}$. Dieses Verhalten ist hauptsächlich eine Folge der Beschaffenheit der Hintergrundschichtung; ähnlich wie in (4.12) ergibt sich aus der Erhaltung des magnetischen Flusses folgende Beziehung erster Ordnung in $1/\beta$ - $1/\beta$ ist z.B. $O(10^{-5})$ im oberen Teil der Flußröhre mit $B_0 = 10^5 \text{ G}$ - :

$$1/\beta(z) \approx 1/\beta_0 \cdot F_e(z) \cdot St^2, \quad (5.25)$$

mit

$$F_e(z) = \frac{\rho_e^2(z)/p_e(z)}{\rho_e^2(z_0)/p_e(z_0)} \quad \text{und dem Dehnungsfaktor } St = \xi_0/\xi, \quad (5.26)$$

während bei den horizontalen Flußröhren von Kap. IV ξ konstant war, d.h. $St = 1$. $F_e(z)$ ist eine Funktion allein der Koordinate z und hängt nicht vom Flußröhrenzustand ab; sie nimmt steil ab in den letzten 10000 km vor der Photosphäre (s. Abb. 5.13). Würde es sich um eine horizontale Flußröhre handeln, so hätte man für $z_0 = 188000 \text{ km}$ unabhängig von der Aufstiegsweise:

$$\begin{aligned} B(z)/B_0 &= 4 \cdot 10^{-3}, \quad z = 10^4 \text{ km}; \\ B(z)/B_0 &= 7 \cdot 10^{-4}, \quad z = 5 \cdot 10^3 \text{ km}. \end{aligned}$$

Durch die oben besprochene Dehnung der Flußröhre kommt aber in den gekrümmten Röhren der vorliegenden Rechnung keine so große Schwächung der Feldstärke zustande. Aus (5.25) ergibt sich, daß der Dehnungsfaktor St mindestens gleich 4 sein muß, damit das Plasma- β in 5000 km Tiefe nicht größer als das anfängliche β , β_0 , wird. Eine solche Dehnung ergibt sich tatsächlich in der Entwicklung der Flußröhren. Am Ende der numerischen Rechnung erhält man maximale Werte des Dehnungsfaktors von $St = 7$ für $B_0 = 10^5 \text{ G}$ bzw. $St = 17$ für $B_0 = 10^6 \text{ G}$. Die Feldstärke im obersten Niveau der Flußröhre beträgt dann $6.6 \cdot 10^3 \text{ G}$ für $B_0 = 10^6 \text{ G}$ ($z=7700 \text{ km}$) bzw. $B = 1.6 \cdot 10^3 \text{ G}$ für $B_0 = 10^5 \text{ G}$ ($z = 3900 \text{ km}$).

Aus diesen numerischen Ergebnissen kann man schließen, daß von den am Boden der Konvektionszone liegenden Flußröhren nur diejenigen mit hoher Feldstärke, etwa $B_0 > 10^5 \text{ G}$, noch in konzentrierter Form die Sonnenoberfläche erreichen können. Denn bei schwächeren Feldern, sagen wir $B_0 = 10^{4.5} \text{ G}$, ist $1/\beta_0$ um eine Zehnerpotenz kleiner als bei $B_0 = 10^5 \text{ G}$, und aus der

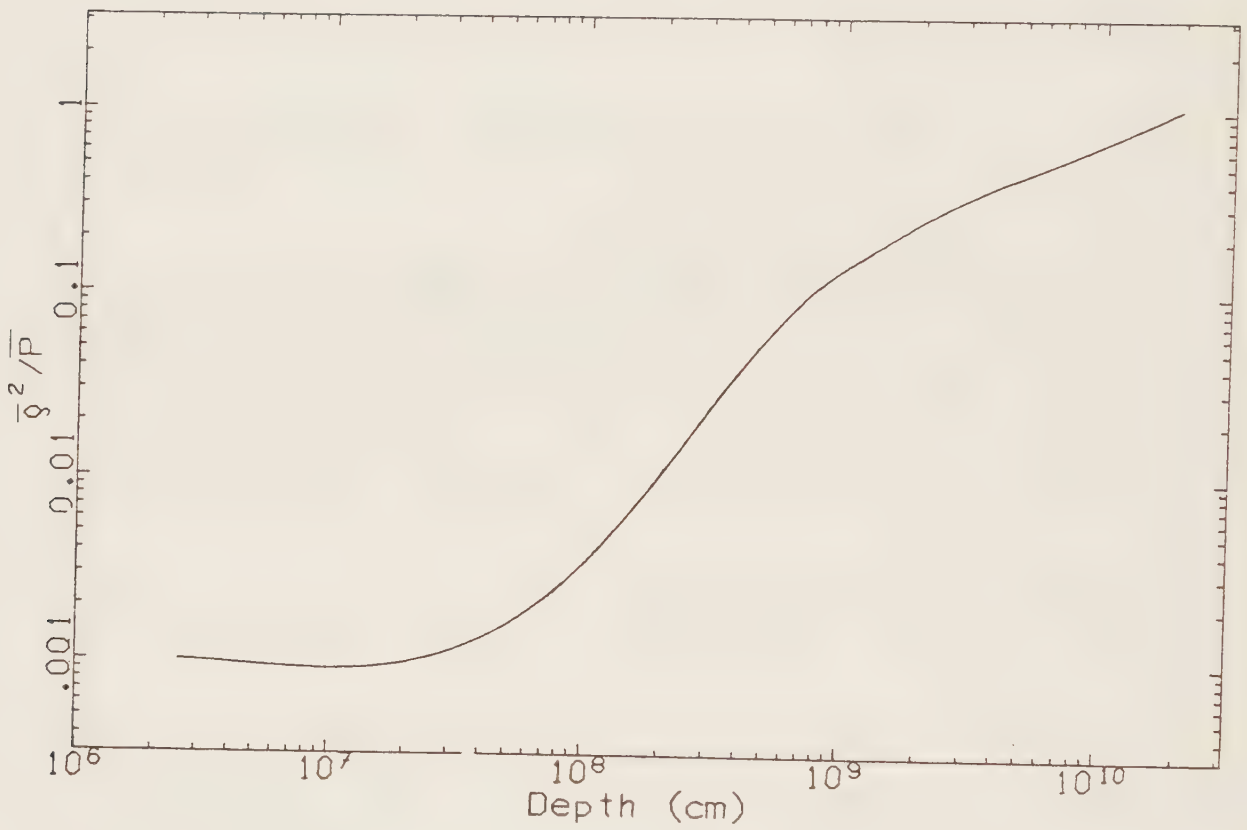


Abb. 5.13: Die Hilfsfunktion $F(z) = \frac{\rho_e^2(z) / p_e(z)}{\rho_e^2(z_0) / p_e(z_0)}$
 in Gl. (5.25) für $z_0 = 1.98 \cdot 10^5$ km.

dynamischen Entwicklung einer instabilen Mode wird sich auch ein kleinerer Wert von St in (5.25) für den aufsteigenden Teil ergeben, so daß sich die Feldstärke innerhalb der letzten 10000 km auf höchstens einige Gauß reduziert. Die konzentrierte Flußröhrenstruktur in diesem Gebiet geht dann verloren: es tritt stattdessen ein loses magnetisiertes Gebiet auf, dessen schwaches Feld die Konvektion in sich selbst nicht mehr verhindern kann; die Trennung zwischen magnetisiertem Plasma und Umgebung ist nicht mehr scharf. Daß der obere Teil einer statischen, am Boden der Konvektionszone verwurzelten und bis in die oberen Schichten derselben emporragenden Flußröhre notwendigerweise ein schwaches Feld und einen großen Querschnitt aufweisen muß, kann durch analytische Mittel gezeigt werden (Spruit und Moreno-Insertis, unveröffentlicht). Daß dies sich durch eine dynamische Entwicklung nicht vermeiden läßt, ist ein Ergebnis der vorliegenden Arbeit.

Eine letzte Bemerkung betrifft die Stabilität des im Kern ruhenden Teiles der Flußröhre. Durch den Aufstieg der übrigen Flußröhre zur Photosphäre erhöht sich die Krümmung des "Knies" der Flußröhre, wo sie den Übergang Konvektionszone-radiativer Kern kreuzt, und es war von vornherein nicht abzusehen, ob nicht der im radiativen Kern versunkene Teil aus seiner stabilen Lage durch die dementsprechend erhöhte Lorentz-Kraft herausgerissen werden kann. Es stellt sich hier heraus, daß die gesunkene Flußröhre während dieser Phase der Rechnung aus dem Kern nicht herausgerissen wird; durch die Abwärtsströmung entlang den Feldlinien treten immer neue Massenelemente der Flußröhre in das stabile Gebiet ein, und dieser Vorgang dauert mindestens solange bis die Flußröhre in der Photosphäre ausbricht. Aus dem stationären Modell von Van Ballegooijen (1982) kann man erwarten, daß im Laufe der weiteren Entwicklung nach dem Ausbruch sich die zwei steilen Äste der Flußröhre in der Konvektionszone voneinander trennen und dabei Teile der versunkenen Flußröhre aus dem Kern austreiben. In jenem Modell wurden jedoch einige vereinfachende Annahmen gemacht, wie z.B. ständiges hydrostatisches Gleichgewicht in der Flußröhre, die eine direkte Übertragung der dadurch gewonnenen Ergebnisse auf die hier berechnete Entwicklung erschweren. Ein Vergleich zwischen beidem ist solange nicht durchführbar, wie sich kein hydrostatisches Gleichgewicht in der Flußröhre eingestellt hat, was erst nach dem Ausbruch in der Photosphäre möglich ist. Diese Phase der Flußröhrenentwicklung wird im folgenden Abschnitt besprochen.

4. Bemerkungen zum Ausbruch der Flußröhre in der Photosphäre.

Die weitere Entwicklung der obersten Massenelemente der Flußröhre nahe und oberhalb der Photosphäre nach Überschreiten des Endzeitpunkts der Rechnung kann im Rahmen dieses numerischen Modells nicht mit zufriedenstellender Genauigkeit ermittelt werden. Denn einige der vereinfachenden Näherungen, die in der vorliegenden Arbeit gemacht worden sind, sind in unmittelbarer Nähe der Photosphäre nicht mehr gültig:

a) die in aktiven Gebieten in der Photosphäre beobachteten magnetischen Elemente, wie etwa Flecken oder Poren, sind keine dünnen Flußröhren. Ein Fleck mit $\phi = 10^{21}$ Mx und $\bar{B} = 3000$ G hat einen Radius von 3000 km, viel größer als die lokale Druckskalenhöhe. Bei den in diesem Kapitel behandelten Flußröhren können deshalb die Effekte, die von der inhomogenen transversalen Struktur der Flußröhre herrühren, in der Nähe der Photosphäre nicht mehr vollständig vernachlässigt werden.

b) die Adiabasie ist in der Photosphäre keine brauchbare Näherung mehr, da die Materie in der Flußröhre an der Photosphäre optisch dünn wird.

c) Oberhalb der Photosphäre sinkt der äußere Druck sehr steil mit der Höhe e , so daß die Feldlinien fächerförmig auseinander laufen und das Magnetfeld eine kraftfreie Struktur annimmt, $(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = 0$.

Sobald in den letzten Phasen der Flußröhrenentwicklung vor dem Ausbruch in der Photosphäre eine endliche optische Tiefe erreicht wird, muß die thermische Isolierung zusammenbrechen. Die betroffene Materie der Flußröhre ist zu dieser Zeit noch nicht im Strahlungsgleichgewicht. Ein nichtmagnetisches Materieelement, das vom Boden der Konvektionszone auf adiabatische Weise zur Oberfläche hinaufbefördert wird, wird i.a. am Ende des Vorgangs wärmer sein als seine Umgebung. Die Massenelemente der Flußröhren dieses Kapitels waren anfänglich kühler als ihre Umgebung ($\rho_{io} = \rho_{eo}$), und zwar $\frac{\Delta T}{T_i} \sim \frac{1}{\beta}$. Im Fall $B_o = 10^6$ G bleiben sie kühler bis mindestens $z = 4000$ km. Bei $B_o = 10^5$ G ist dagegen schon ein Temperaturüberschuß von $\frac{\Delta T}{T_i} \sim 10^{-4}$ bei $z = 8000$ km zu verzeichnen. In der Nähe der optischen Tiefe 1 muß auf jeden Fall eine sehr intensive Abstrahlung einsetzen, welche die dort befindlichen Massenelemente der Flußröhre in Zeiträumen von der Ordnung 1 sec abkühlt. Dadurch wird die Materie in der Flußröhre ihren Auftrieb verlieren; eine Abwärtsströmung entlang den Feldlinien wird hervorgerufen bzw. verstärkt. Dieser Vorgang

ähnelt in etwa der Abkühlung der aufsteigenden und dann horizontal auseinander strömenden Materie in einem Granulum (s. z.B. Nordlund 1983), die dadurch dichter wird und am Rande des Granulums absinkt. Im Gegensatz zu den konvektiven Vorgängen in einem Granulum ist aber der Flußröhrenausbruch kein auch nur annähernd stationärer Vorgang. Auch kann die Materie nicht seitwärts ausweichen, da die Lorentz-Kraft dies verhindert.

Das Bestehen einer nach unten gerichteten Strömung entlang den Feldlinien in Verbindung mit der stark überadiabatischen Schichtung der letzten tausend Kilometer der Konvektionszone kann zu einem "konvektiven Kollaps" führen (Parker 1978, Spruit 1979). In der Spruitschen Arbeit wird eine in der Photosphäre befindliche vertikale Flußröhre betrachtet, die durch eine Verschiebung der Materieelemente nach unten aus ihrem hydrostatischen Gleichgewicht gebracht wird. Wegen der hohen Superadiabatizität der äußeren Schichtung ist das Gleichgewicht instabil, so daß die Materie in der linearen Näherung nicht gestoppt werden kann und weiter nach unten fällt. Dieser Prozeß ist aber mit einer beträchtlichen Streckung der Materie entlang den Feldlinien und einer Verstärkung des Feldes verbunden. Im nichtlinearen Régime widersetzt sich schließlich dieser Effekt der Abwärtsströmung und stabilisiert die Flußröhre aufs neue (vgl. Gl.5.23). Am Ende ergibt sich eine Struktur, bei der der magnetische Druck der Flußröhre in der Photosphäre den äußeren Gasdruck beinahe kompensiert und wieder hydrostatisches Gleichgewicht herrscht.

Die in diesem Kapitel numerisch berechneten Flußröhren werden bald nach dem Ausbruch durch die Photosphäre wegen des hohen Auftriebs in ihren oberen Teilen eine vertikale Stellung einnehmen. Die wachsende Neigung der Flußröhre fördert die Abwärtsströmung, so daß bei nicht zu schwachem Magnetfeld ein einsetzender konvektiver Kollaps beschleunigt wird.

Einige dieser Vorgänge konnten in der Tat durch eine Proberechnung über den bisherigen Endzeitpunkt hinaus bestätigt werden. Dabei wurde der obere Rand willkürlich auf $z = 1000$ km festgelegt und dort eine neue Randbedingung eingesetzt, die im wesentlichen verschwindende Krümmung und eine 2-Punkt Extrapolation der Werte der spezifischen Länge τ (s. Def. 2.14 und 2.16) auf den Rand vorschreibt. Die Massenelemente der Röhre, die diese obere Grenze im Laufe der weiteren Entwicklung überschreiten, fallen demnach in der numerischen Rechnung weg.

Das Ergebnis dieser Proberechnung für einen Fall mit Anfangsfeldstärke $B_0 = 10^6 \text{ G}$ am Boden der Konvektionszone sieht in etwa so aus: die oberste Strecke der Flußröhre unterhalb $z = 1000 \text{ km}$ strebt sehr schnell gegen die Vertikale. Dabei wächst die Abwärtsströmung entlang den Feldlinien ständig, und dies leitet einen von oben nach unten fortschreitenden Vorgang ein, wodurch sich annähernd hydrostatisches Gleichgewicht entlang den Feldlinien einstellt. Auch die tieferen Teile der Flußröhre oberhalb des radiativen Kernes streben in einer langsameren Zeitskala gegen die Vertikale; dabei trennen sich die beiden symmetrischen steilen Äste der aufgebrochenen Flußröhre voneinander. Die horizontale Geschwindigkeit der obersten Teile der Flußröhre ist um eine Größenordnung höher als die der Strecke in der tiefsten Konvektionszone. Diese Differenz wird aber im Laufe der Zeit abgebaut, und die so erhaltene Bewegung und Form scheint sich asymptotisch den stationären Lösungen von Van Ballegooijen (1982) anzunähern, in denen hydrostatisches Gleichgewicht und eine von der Höhe unabhängige horizontale Geschwindigkeit der Flußröhre als grundlegende Hypothese im Modell eingebaut wurden.

VI. Die Bewegung von magnetischen Flußröhren in einer großräumigen Konvektionszelle

1. Die konvektiven Strömungen unterhalb der Photosphäre.

Die konvektiven Strömungen in der Konvektionszone der Sonne sind trotz ihrer turbulenten Natur nicht vollständig ungeordnet. An der Oberfläche der Sonne beobachtet man Konvektionszellen von zwei Typen, nämlich Granulen und Supergranulen, deren Durchmesser um ein deutliches Maximum bei 1000 km bzw. 30000 km verteilt sind. Es liegt bis heute keine vollständige theoretische Erklärung vor, warum diese zwei Längenskalen von der Konvektion ausgezeichnet werden. Simon und Weiss (1968) zeigten, daß der konvektive Wärmetransport durch Konvektionszellen, die sich über mehrere Dichteskalenhöhen erstrecken, effektiver sein kann als in dem Fall, daß die konvektiven Elemente ihre Identität nach Zurücklegen von etwa einer Skalenhöhe verlieren, wie in den Mischungswegmodellen angenommen wird. Im Rahmen ihres Modells konnten diese Autoren die Existenz von den zwei ausgezeichneten Längenskalen an der Oberfläche verständlich machen und sagten eine dritte Längenskala voraus, die der sogenannten Riesenzellen, die sich von etwa 15000 km Tiefe bis zum Boden der Konvektionszone erstrecken und einen Oberflächendurchmesser von etwa zwei- bis dreimal der Tiefe der Konvektionszone besitzen sollen.

Es gibt bis heute zwar noch keine endgültig bestätigte direkte Beobachtung von solchen Strömungsfeldern (Beckers 1981, Schröter und Wöhl 1976) aber doch verschiedene indirekte Hinweise für die Existenz der Riesenzellen; es seien nur zwei genannt; erstens das Vorkommen von sogenannten "active longitudes", d.h. von bestimmten heliographischen Längen, wo einige Generationen von aktiven Gebieten hintereinander auftreten, als ob sich darunter ein aufströmendes Gebiet einer solchen Zelle befände. Zweitens die numerischen Modelle von Graham (1975) über instabil geschichtete Flüssigkeiten, wo sich Konvektionszellen bilden, die sich über mehrere Dichteskalenhöhen in vertikaler Richtung erstrecken, und zwar vom unteren bis zum oberen Rand des untersuchten Gebietes (s.a. Moore 1981).

Die Anwesenheit von solchen großräumigen konvektiven Strömungen kann die Bewegung der in ihnen befindlichen magnetischen Flußröhren stark

beeinflussen, und zwar auch dann, wenn ihre Feldstärke und ihr magnetischer Fluß so groß sind, daß die Flußröhre ihre Identität als solche mitten in der konvektiven Strömung bewahren kann (vgl. IV.5). Man bezeichne mit v_c die Geschwindigkeit einer solchen Strömung in einer bestimmten Tiefe der Konvektionszone und betrachte eine unbewegte Flußröhre im thermischen Gleichgewicht an derselben Stelle; die von der Strömung auf die Röhre ausgeübte Widerstandskraft wird den magnetischen Auftrieb der letzteren übertreffen, wenn (4.11, 2.35)

$$g \cdot 1/\beta < \frac{v_c^2}{\pi r}, \quad (6.1)$$

$$\text{oder, mit } B_{\text{Äq}} \stackrel{\text{def}}{=} (4\pi\rho v_c^2)^{1/2} \quad (6.2)$$

$$B^2 < \left(\frac{2H_p}{\pi r}\right) B_{\text{Äq}}^2. \quad (6.3)$$

Mit $v_c \sim 60 \text{ m/sec}$ in der tiefen Konvektionszone, $z = 1.7 \cdot 10^5 \text{ km}$ (Spruit 1977), und für eine Flußröhre mit einem magnetischen Fluß von 10^{21} Mx ergibt sich $B < 6 \cdot 10^4 \text{ G}$. Eine solche konvektive Strömung wird also die Bewegung von Flußröhren mit $B < 10^5 \text{ G}$ und im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung stark beeinflussen. Ein anderes Beispiel: Man betrachte eine sinusförmige Flußröhre in einer vertikalen Ebene mit Wellenlänge λ und Amplitude Q . Die maximale Krümmung in der Röhre beträgt

$$\frac{1}{R_{\text{curv}}} = \frac{4\pi^2 Q}{\lambda^2}, \quad (6.4)$$

mit R_{curv} = Krümmungsradius. Eine solche Röhre könnte der konvektiven Strömung widerstehen, wenn

$$\frac{B^2}{4\pi\rho} \frac{1}{R_{\text{curv}}} > \frac{v_c^2}{\pi r}, \quad (6.5)$$

d.h.,

$$Q > \left(\frac{B_{\text{Äq}}}{B}\right)^2 \frac{\lambda^2}{4\pi^3 r}. \quad (6.6)$$

Für eine Flußröhre mit $B = 10^5$ G, $\phi = 10^{21}$ Mx und einer Wellenlänge gleich der doppelten Tiefe der Konvektionszone ergibt sich $a > 1.7 \cdot 10^4$ km, für $B = 10^{4.5}$ G gar $a > 10^5$ km, und noch größere Amplituden wären im Fall schwächerer Felder notwendig.

Die konvektive Strömung einer solchen Zelle wird nach diesen Abschätzungen die Bewegung von Flußröhren mit $B \lesssim 10^4$ G weitgehend bestimmen, die von Flußröhren mit $B \sim 10^5$ G immer noch merklich beeinflussen, und zwar derart, daß die Flußröhren, zumindest diejenigen mit schwacher Feldstärke, von den aufströmenden Gebieten zur Oberfläche befördert und in den abströmenden Gebieten am Boden der Konvektionszone festgehalten werden. Auf diese Weise kann die rücktreibende Wirkung der Lorentz-Kraft überwunden werden, die, wie im letzten Kapitel gezeigt wurde, die Instabilität der Flußröhren, die sich anfänglich im mechanischen Gleichgewicht befinden, gegenüber Störungen kurzer Wellenlänge unterdrückt. Andererseits kann auch der Auftrieb von horizontalen Flußröhren im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung (Kap. IV) in der konvektiven Strömung kompensiert und somit der schnelle Aufstieg zur Photosphäre (IV.2) mindestens eines Teils der Flußröhre während der Lebensdauer der Zelle vermieden werden.

In diesem Kapitel wollen wir die Bewegung von magnetischen Flußröhren in einer Konvektionszelle, die sich in vertikaler Richtung über die ganze Konvektionszone erstreckt, im Rahmen des in dieser Arbeit entwickelten numerischen Verfahrens untersuchen. In VI.2 wird das zu diesem Zweck benutzte Modell einer Konvektionszelle vorgestellt. VI.3 befaßt sich dann mit den numerischen Ergebnissen.

Mit der Untersuchung dieses Kapitels eng verwandt ist die 1979 erschienene Arbeit von Meyer et al., die sich mit der Bewegung von magnetischen Flußröhren in Supergranulen befaßt. Das Augenmerk ihrer Untersuchung richtete sich auf das Auftreten und den Zerfall von aktiven Gebieten in der Oberfläche - eventuell auch von ephemeren aktiven Gebieten - sowie den sogenannten "moving magnetic features" und den "network fields" (s. Harvey and Harvey (1973), Harvey 1977, Harvey et al. 1975). Die supergranulare Strömung haben sie durch eine vorgegebene Flußfunktion modelliert und einige Vereinfachungen bei der Behandlung der Flußröhre eingeführt; z.B. wurde die Dynamik der Flußröhre in tangentialer Richtung nicht be-

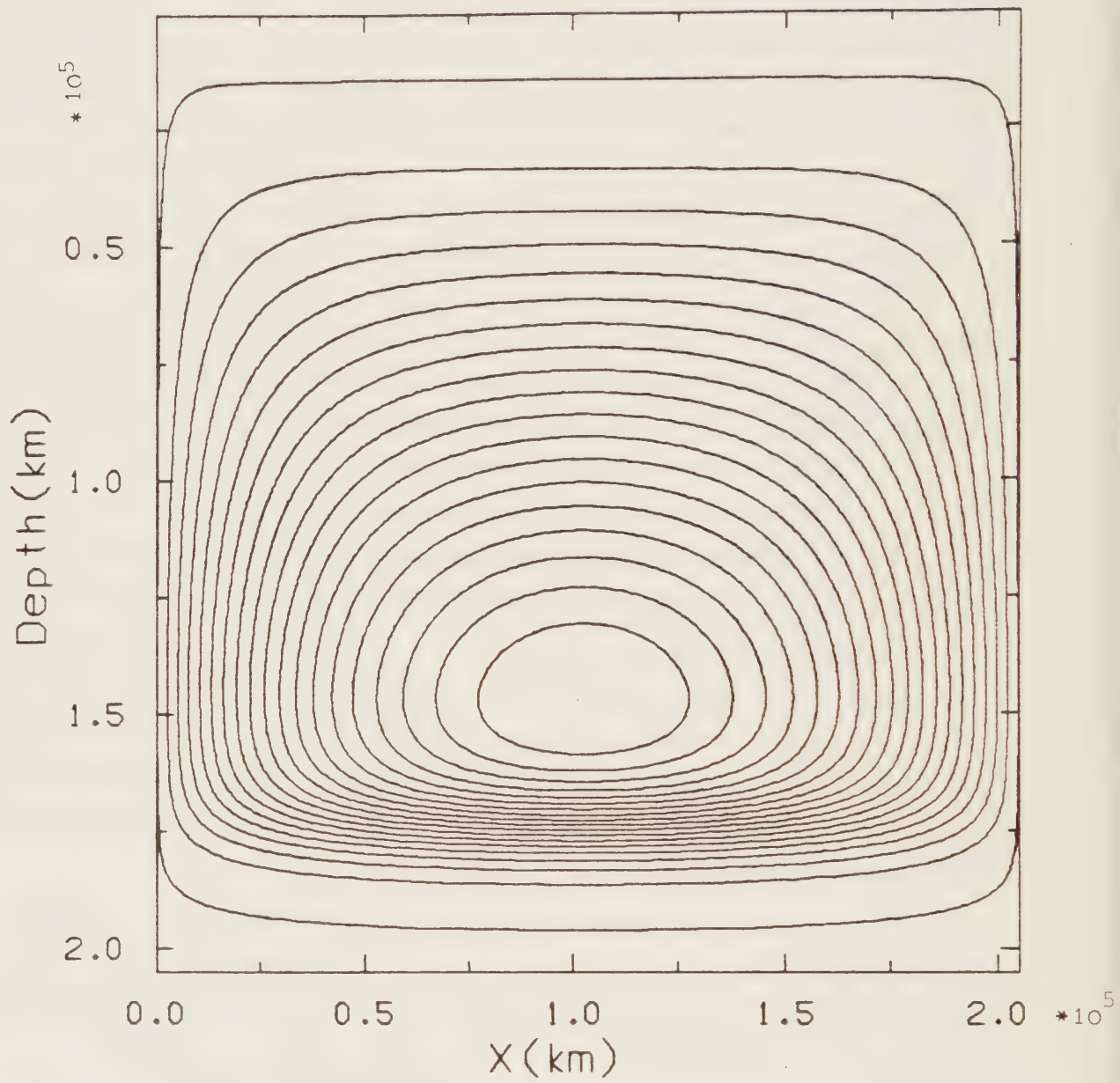


Abb.6.1: Stromlinien des Konvektionszellenmodells
in gleichen Stufen der Flußfunktion (6.10)

rücksichtigt und die Geschwindigkeit senkrecht zur Röhre durch die Bedingung einer instantanen Anpassung der Strömungswiderstandskraft an die Summe der Auftriebs- und Krümmungskraft bestimmt. Das Auftreten von neuem magnetischen Fluß in der Mitte einer Supergranule und die nachfolgende schnelle Trennung der entgegengesetzten Polaritäten in Richtung zu den Rändern der Zelle ergab sich aus diesem numerischen Modell. Die Autoren zeigten auch, daß anfänglich horizontale Flußröhren, die in die Zelle durch ihren Boden eindringen, bis zur Oberfläche befördert werden: Flußröhren mit hohen Werten des Magnetfeldes werden am Ende die Konvektionszelle ganz verlassen, während kleinere Flußröhren stark gebeugt werden müssen, wodurch entgegengesetzte Polaritäten nahe aneinander gebracht werden.

2. Modell einer Konvektionszelle

Das Modell einer stationären zweidimensionalen Konvektionszelle, das in den Rechnungen dieses Kapitels benutzt wird, ist eine Anpassung der in der soeben genannten Arbeit von Meyer et al. (1979) eingeführten Konvektionszelle an unser Problem. Es wird durch eine Flußfunktion $\psi(x,z)$ beschrieben mit

$$\begin{aligned} \rho u &= \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \rho v &= - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

wo u und v wie bisher die x - bzw. z -Komponente der Geschwindigkeit darstellen (der Zeichenwechsel gegenüber Meyer et al. ergibt sich aus unserer Wahl von z als die Tiefe in der Konvektionszone), so daß

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (6.8)$$

und die Höhenlinien von ψ mit den Stromlinien zusammenfallen. Die von Meyer et al. benutzte Konvektionszelle zeigte eine starke Scherung an ihrem Boden, wo auch die horizontale Geschwindigkeit einen maximalen Wert erreichte. Da wir auch an Bewegungen unterhalb der Konvektionszelle interessiert sind, müssen wir für einen stetigen Übergang des Strömungsfeldes in das darunterliegende Gebiet sorgen. Wir möchten also, daß das Maximum der horizontalen Geschwindigkeit in einem Niveau oberhalb des Bodens der Zelle angenommen wird, und daß die Geschwindigkeit von dort abwärts schnell gegen Null strebt. Zu diesem Zweck multiplizieren wir die Flußfunktion von Meyer et al. mit einer Funktion der Gestalt

$$\left[1 + \exp\left(2 \frac{z-z_w}{D}\right)\right]^{-1}, \quad (6.9)$$

wo z_w und D freizuwählende Parameter darstellen, die die Lage des Maximums der Horizontalgeschwindigkeit bzw. die Steilheit des Abfallens derselben in dem darunterliegenden Gebiet bestimmen. Die Flußfunktion ist dann

$$\psi(x, z) = 2v_o \rho H \exp\left(-\frac{d'}{2H}\right) \left[\cosh\left(\frac{x - \frac{1}{2} d'}{H}\right) - \cosh\left(\frac{d'}{2H}\right) \right] \cdot F(z), \quad (6.10)$$

mit $H = c' H_\rho$, c' als einem festen Parameter, H_ρ als Dichteskalenhöhe, und

$$F(z) = \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{z-d'}{H(d')}\right)}{1 - \exp\left(\frac{-d'}{H(d')}\right)} - \exp\left(-\frac{z}{H(o)}\right) \right] / \left[1 + \exp\left(2 \frac{z-z_w}{D}\right) \right]. \quad (6.11)$$

Für d' , die Tiefe der Zelle, wurde hier $2.05 \cdot 10^5$ km genommen; weiter wurde $z_w = 1.75 \cdot 10^5$ km und $D = 10^4$ km gewählt. Der Parameter c' bestimmte im Modell von Meyer et al. die Tiefe des "Auges" der Zelle und somit die Stärke der Scherung am Boden derselben; wir setzen hier $c' = 1$. v_o ist ein Skalenfaktor der Strömungsgeschwindigkeit und wird weiter unten bestimmt.

Einen optischen Eindruck der Haupteigenschaften des Strömungsfeldes bekommt man durch Abb. 6.1 und 6.2, die die Stromlinien der Zelle bzw. eine perspektivische Darstellung der Funktion $|\vec{v}|(x, z)$ enthalten. Das Auge

CONVECTIVE SPEED (m/sec)

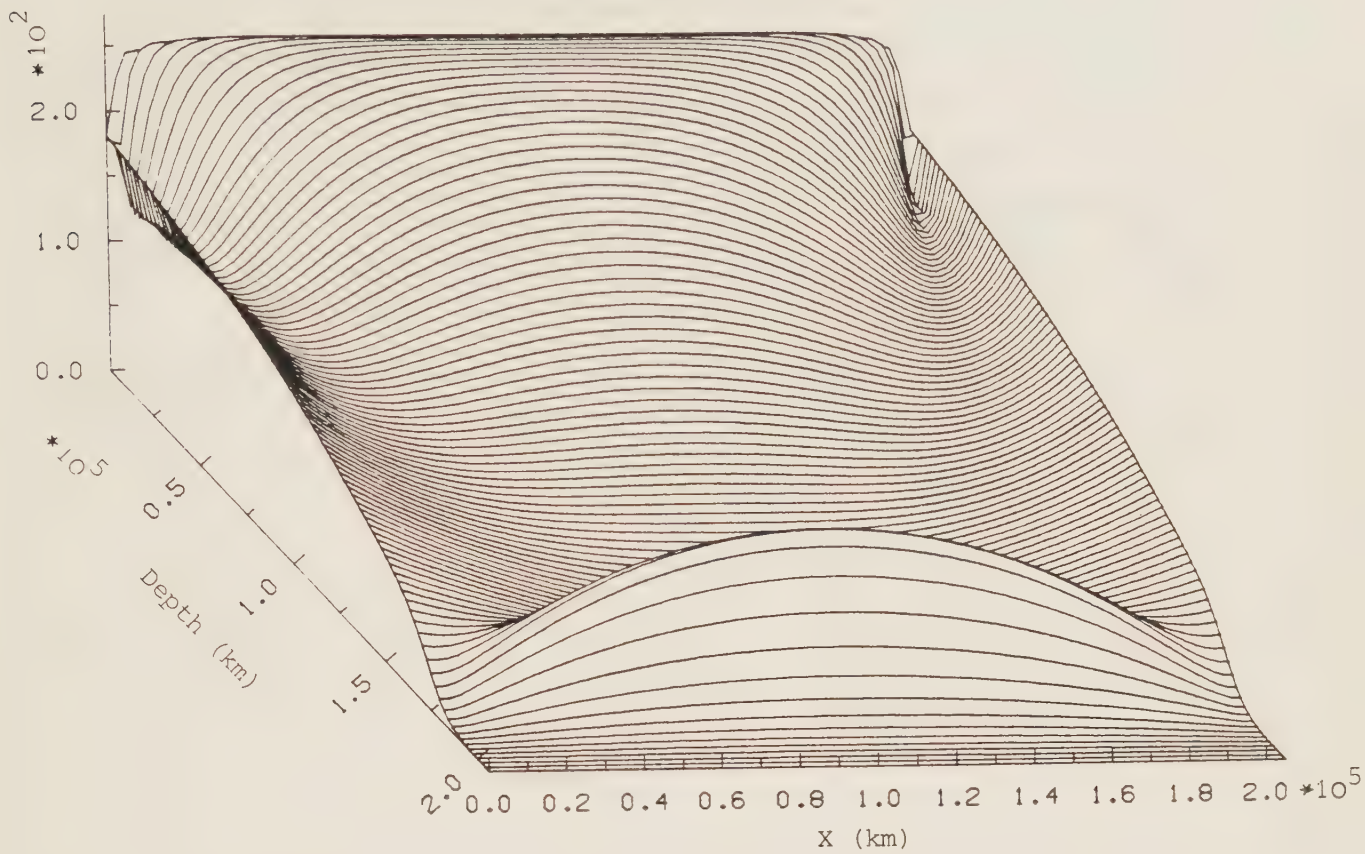


Abb. 6.2 : Perspektivische Abbildung des Betrags der Strömungsgeschwindigkeit in der Konvektionszelle .

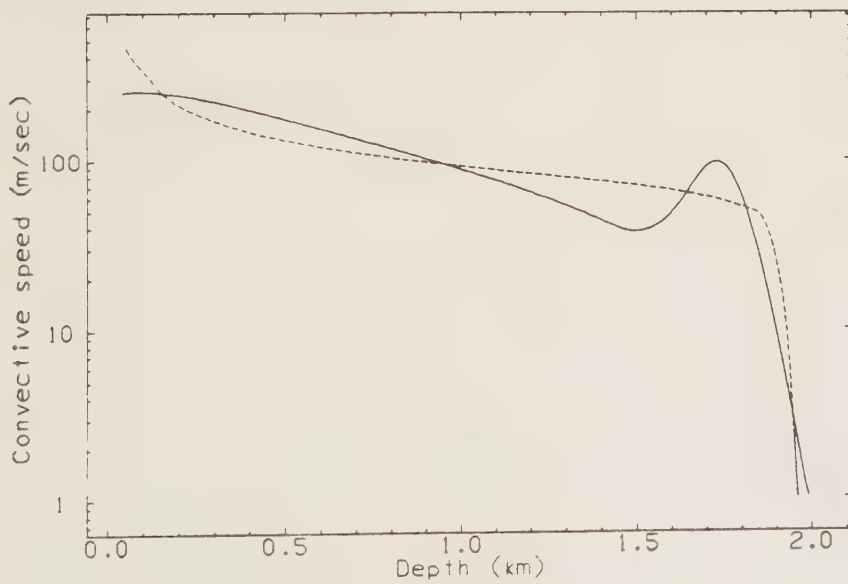


Abb. 6.3: Konvektive Geschwindigkeit im numerischen Modell von Spruit (1977) (gestrichelte Linie) gegenüber dem in j der Tiefe gemittelten Wert der Strömungsgeschwindigkeit im Zellenmodell (durchgezogene Linie)

• 10⁵

der Zelle befindet sich im unteren Drittel derselben. Abb. 6.3 zeigt das Profil der Geschwindigkeit $\bar{v}(z)$ - Durchschnittswert der Geschwindigkeit in einer festen Tiefe z - (durchgezogene Linie) verglichen mit der Verteilung einer typischen konvektiven Geschwindigkeit, $v_c(z)$, aus dem Mischungswegmodell der Konvektionszone von Spruit (1977) (gestrichelte Linie). Der Parameter v_0 wurde so gewählt, daß eine optimale Anpassung der beiden Profile erreicht wird, und zwar $v_0 = 181.6 \text{ m/sec}$.

Für die Beschreibung weiterer Eigenschaften dieses Strömungsfeldes, die schon im Modell von Meyer et al. vorhanden waren, verweisen wir auf ihre Originalarbeit (1979).

3. Numerische Ergebnisse.

3.1 Flußröhren anfänglich im mechanischen Gleichgewicht.

Wir betrachten zunächst Flußröhren, die sich anfänglich im mechanischen Gleichgewicht in einer horizontalen Lage am Boden der Konvektionszone befinden. In diesem Abschnitt werden drei verschiedene Anfangsfeldstärken, nämlich $B_0 = 10^4 \text{ G}$, $10^{4.5} \text{ G}$, 10^5 G und ein magnetischer Fluß von 10^{21} Mx berücksichtigt. Befinden sich diese Flußröhren nahe dem Übergang zum radiativen Kern, wo die konvektive Strömung sehr schwach ist, so werden sie zunächst vom äußeren Plasma durch Einstrahlung aufgeheizt (vgl. IV.4) und langsam (s. Abb. 4.5) zu etwas höheren Niveaus aufsteigen, wo der Einfluß der konvektiven Strömung sich dann allmählich bemerkbar macht. Um die Dauer der numerischen Rechnung in Grenzen zu halten, fangen wir die Rechnung in Höhen über dem Boden der Zelle an. Wir wählen $z_0 = 1.84 \cdot 10^5 \text{ km}$ für $B = 10^4 \text{ G}$, $z_0 = 1.8 \cdot 10^5 \text{ km}$ für $B = 10^{4.5} \text{ G}$ und $z_0 = 1.76 \cdot 10^5 \text{ km}$ für $B = 10^5 \text{ G}$, alle noch innerhalb der tiefsten 22000 km der Konvektionszone. Die daraufhin

von der Konvektion veranlaßte Entwicklung verläuft in einer dynamischen Zeitskala, viel schneller als der thermische Austausch mit der Umgebung (s. Kap. IV und weiter unten in diesem Kapitel), so daß wir auch hier den Austausch in sehr guter Näherung nicht zu berücksichtigen brauchen.

Abb. 6.4a bis c zeigen die Entwicklung dieser Flußröhren bis kurz vor Erreichen der Photosphäre - es gilt dieselbe obere Grenze wie im vorigen Kapitel, s. V.2. Die Flußröhren mit kleineren Werten von B_0 müssen sich an die Stromlinien der Konvektion anpassen. Der relativ starken Strömung am Boden der Zelle - etwa 100 m/sec in einer Tiefe $z = 1.7 \cdot 10^5$ km - können diese Flußröhren nur durch eine starke Krümmung entgegenwirken (Abb. 6.5). Ihr aufsteigender Teil läßt hinter sich einen fast vertikalen Ast zurück, der um so näher am rechten Rande der Zelle steht, je schwächer das anfängliche Feld war. Bei den stärkeren Feldern kann eine geringere Krümmung den Strömungswiderstand am Boden der Zelle ausgleichen, und der steigende Teil der Flußröhre kann näher an die zentrale vertikale Ebene der Zelle rücken, wo die höchsten horizontalen Geschwindigkeiten vorhanden sind. Im Falle $B_0 = 10^5$ G, schließlich, kann der Strömungswiderstand schon durch eine im Vergleich mit den anderen Fällen geringe Verformung überwunden werden, und die Flußröhre wandert durch die Konvektionszelle hindurch ohne angehalten zu werden.

Betrachten wir zuerst den Fall $B_0 = 10^4$ G im Einzelnen (Abb. 6.4a). Die Flußröhre wird in diesem Fall zunächst um die Zelle gewickelt, die Verbindung des quasihorizontalen Teils der Flußröhre mit dem steilen oberen Ast erfolgt durch eine kurze Strecke mit starker Krümmung - der Krümmungsradius beträgt dort nur $1.5 \cdot 10^4$ km (Abb. 6.5). Die wachsende Krümmung des aufsteigenden Teiles der Flußröhre am rechten Rand der Zelle kann den weiteren Aufstieg derselben nicht verhindern. Ursache dieses Verhaltens ist sowohl die nach oben zunehmende vertikale konvektive Geschwindigkeit wie auch der zu den höheren Niveaus hin immer wichtiger werdende Flußröhrenauftrieb, der in diesem Fall hauptsächlich von der instabilen äußeren Schichtung herrührt (vgl. IV.1, IV.4). Die Feldstärke beim Erreichen der letzten berechneten Höhe, $z = 1.8 \cdot 10^4$ km, ist schwach, $B = 230$ G, wie aus den Ergebnissen des vorigen Kapitels zu erwarten war (V.3). Sie muß noch viel schwächer werden in den höheren Niveaus, wodurch auch die konzentrierte Flußröhrenstruktur verloren geht. Der oberste noch konzentrierte Teil

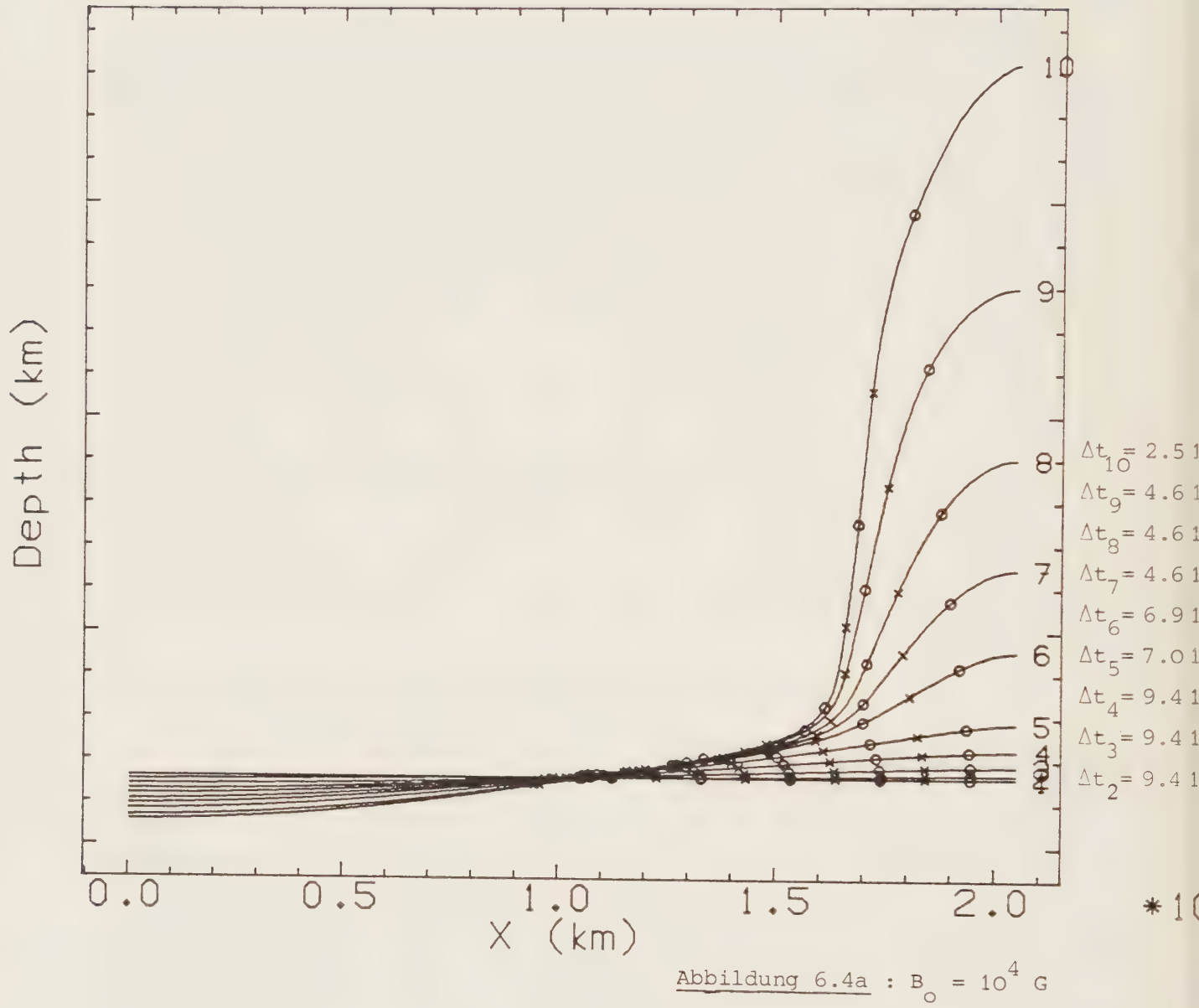


Abb. 6.4 a,b,c : Zeitliche Entwicklung von anfänglich horizontalen im mechanischen Gleichgewicht befindlichen magnetischen Flußröhren unter Einwirkung der konvektiven Strömung des Zellenmodells von Abb. 6.1 - 6.3 für verschiedene Anfangsfeldstärken. (Kennzeichnung wie in Abbildung 5.4)

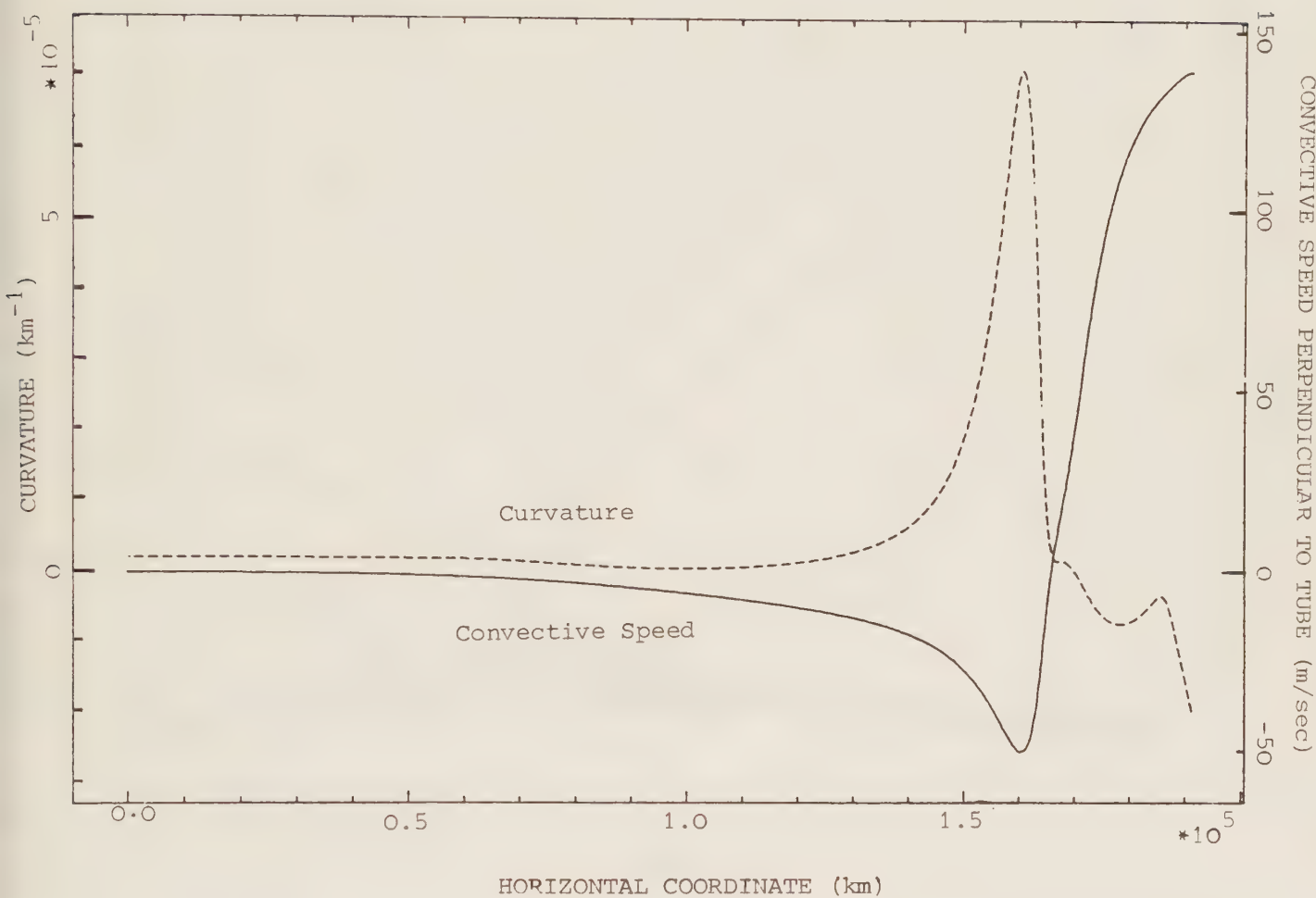


Abb. 6.5 (entspricht Abb.6.4a): Die zur Flußröhre senkrechte Komponente der Strömungsgeschwindigkeit im äußeren Medium (durchgezogene Linie) sowie die Krümmung der Flußröhre (gestrichelte Linie) als Funktion der Horizontalcoordinate für die letzte dargestellte Zeit in Abb. 6.4a. ($B_0 = 10^4 \text{ G}$). (Die obersten 10000 km der Flußröhre sind hier nicht dargestellt).

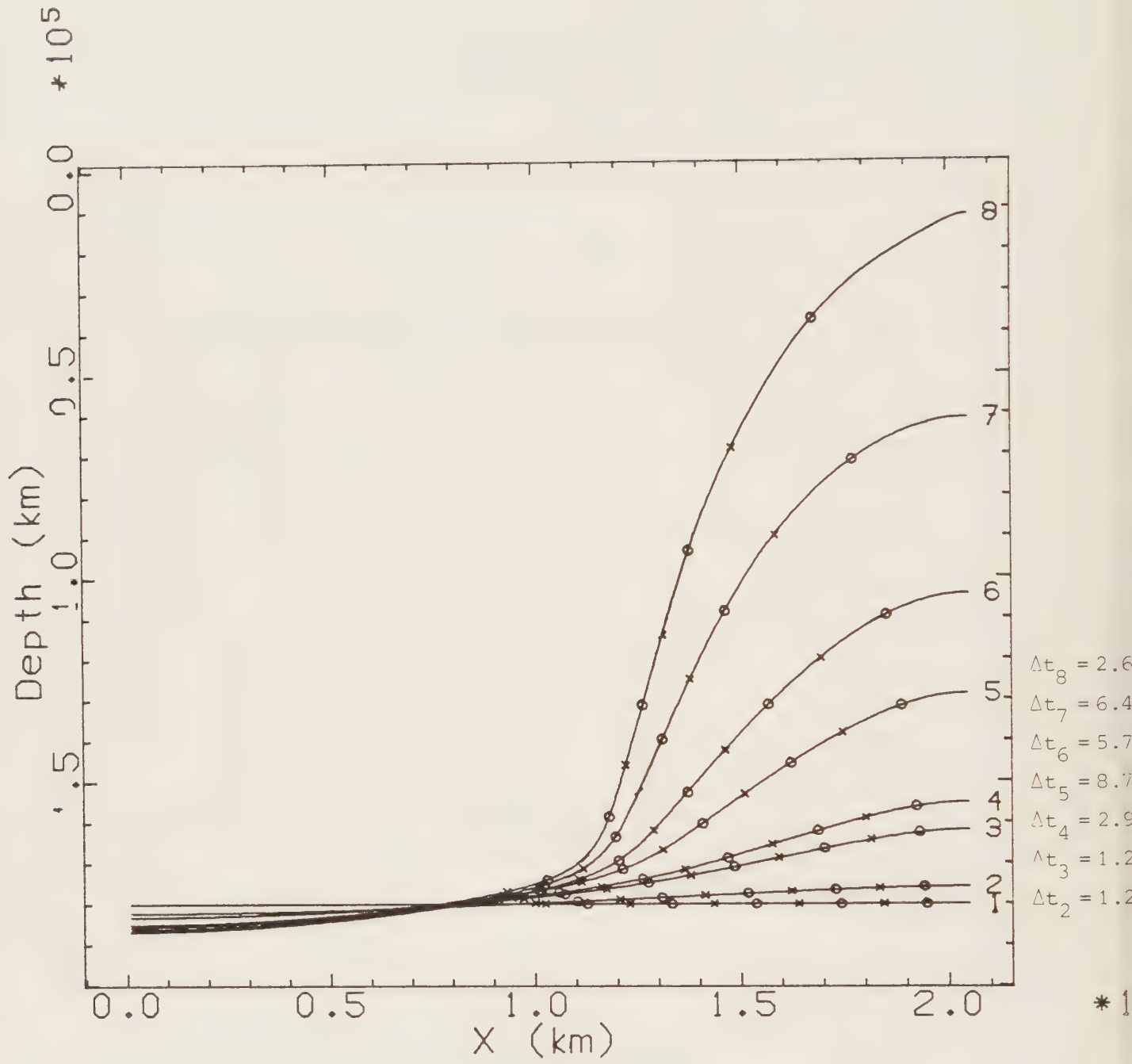


Abbildung 6.4 b : $B_0 = 10^{4,5} \text{ G}$
 (s. Abb. 6.4a)

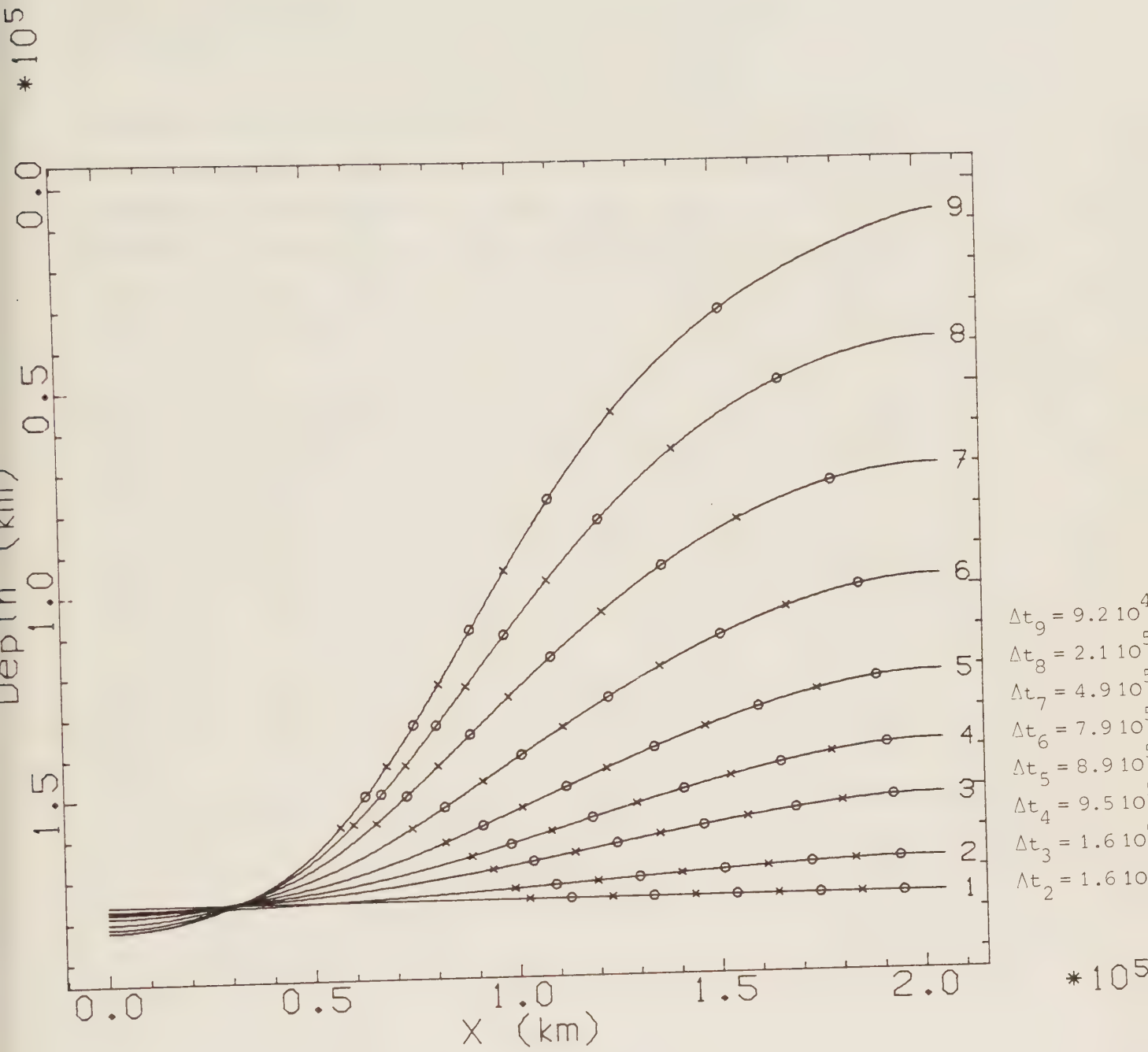


Abbildung 6.4 c: $B_0 = 10^5 \text{ G}$
 (s. Abb. 6.4a)

der Flußröhre wird von der Strömung mitgeschleppt (nach links in der Abbildung), wobei er bald wegen der in dieser Höhe dominierenden Auftriebskraft eine fast vertikale Stellung einnehmen muß.

Andererseits sinkt der untere Teil der Flußröhre und nähert sich dem radiativen Kern an. Eine leichte Abwärtsströmung macht die Massenelemente der Flußröhre nahe dem linken Rand immer schwerer gegenüber ihrer Umgebung. Auf diese Weise wird die sinkende Bewegung fortgesetzt, bis sie spätestens durch die steile Entropieabnahme des umgebenden Mediums nach unten im radiativen Kern gestoppt wird, ähnlich wie schon im vorigen Kapitel besprochen (s. V.2).

Die Dauer des berechneten Vorgangs für diese Anfangsfeldstärke beträgt 67 Tage. Die Aufstiegsgeschwindigkeit des rechten Extremes der Flußröhre ist ein Bruchteil, etwa $1/3$ bis $1/2$, der konvektiven Geschwindigkeit außer in den obersten Schichten der Konvektionszone. Es ergeben sich dann Aufstiegszeiten, die länger sind als die entsprechende Aufstiegszeit eines Massenelementes der Zelle zwischen dem Anfangsniveau z_0 und $z = 1.8 \cdot 10^4$ km, 26 Tage.

Auch bei hoher Anfangsfeldstärke, $B_0 = 10^5$ G (Abb. 6.4 c), entwickelt sich eine Flußröhre, die sich von der tiefen Konvektionszone bis in die Photosphäre erstreckt. Eine solche Konfiguration kann aber in diesem Fall nur durch die Einwirkung der konvektiven Strömungen entstehen; bei einer der Breite der Konvektionszelle entsprechenden Wellenlänge und dieser Feldstärke ist nämlich keine Knickinstabilität möglich, und zwar wegen der starken rücktreibenden Wirkung der magnetischen Krümmungskraft. Die konvektive Strömung ist bei $B_0 = 10^5$ G noch in der Lage, die Krümmungskraft zu überwinden; der Aufstieg wird darüber hinaus durch eine einsetzende Abwärtsströmung entlang den Feldlinien gefördert: ähnlich wie im letzten Kapitel (V.2,3) ist die Tangentialkomponente der Flußröhrengeschwindigkeit nach unten gerichtet; daraus ergibt sich eine Streckung des oberen Teils der Flußröhre, die ihn leichter macht und zu einem schnelleren Aufstieg der Flußröhre beiträgt. Es ergibt sich eine Aufstiegs- geschwindigkeit, die etwa eine Größenordnung kleiner ist als die vertikale Strömungsgeschwindigkeit der Zelle. Am anderen Ende der Flußröhre, nämlich am abwärtsströmenden Rand der Zelle, ergibt sich der umgekehrte Prozeß, der hier die Röhre absinken läßt. Die Abwärtsströmung entlang der Flußröhre macht das untere Ende immer schwerer gegenüber der Umgebung, das Magnetfeld muß auch schwächer werden, wie in V.2 besprochen. Die Lorentz-Kraft nimmt trotzdem wegen der wachsenden Krümmung ständig zu. Das linke Ende der Fluß-

röhre sinkt dann langsam und trifft auf Gebiete, wo die konvektive Strömung schwach ist und keine wichtige Rolle mehr spielt.

Insgesamt betrachtet kann die Flußröhre mit $B_0 = 10^5 \text{ G}$ die Mitte der Zelle ohne große Verformung durchqueren; falls eine stabile Endlage möglich ist, muß sie aus einer fast vertikalen Flußröhre im abströmenden Gebiet der Zelle bestehen, wo sich vielleicht ähnlich wie in Kap. V das hydrostatische Gleichgewicht in der Röhre durch einen dem konvektiven Kollaps (s.V.4) ähnlichen Prozeß eingestellt hat und am unteren Ende die Krümmungskraft durch den Dichteüberschuß, eventuell auch teilweise durch die konvektive Strömung kompensiert wird. Am Ende des berechneten Prozesses ergab sich eine Feldstärke von $B=1800 \text{ G}$ bei $z = 7600 \text{ km}$. Die Dauer des Aufstiegs der Flußröhre zur Oberfläche beträgt hier 76 Tage, wiederum länger als die entsprechende Aufstiegszeit eines Massenelementes der Zelle zwischen z_0 und 7600 km , 18 Tage.

Ein weiterer Fall mit Anfangsbedingung $\rho_{i0} = \rho_{e0}$ wurde gerechnet, nämlich $B_0 = 10^6 \text{ G}$, der ein Beispiel einer gegenüber der Konvektion starken Flußröhre liefert. Eine solche Röhre wird von den konvektiven Strömungen in der unteren Hälfte der Konvektionszone ($z \gtrsim 10^5 \text{ km}$) kaum betroffen: Es entsteht eine leicht gekrümmte Flußröhre, die der Konvektion widerstehen kann, und zwar über Zeiträume, die lange sind im Vergleich mit der charakteristischen Alfvén-Zeit der Röhre. Oberhalb $z_0 \sim 10^5 \text{ km}$ ist eine solche Flußröhre für eine der Breite der Zelle entsprechende Wellenlänge instabil im Sinne der Knickinstabilität vom letzten Kapitel. Bei $z_0 \lesssim 10^5 \text{ km}$ wird also ein Teil der Flußröhre durch die Entwicklung einer instabilen Normalmode zu dieser Wellenlänge zur Photosphäre gebracht. Die Rolle der Konvektion reduziert sich in diesem Fall auf die Anregung dieser speziellen Normalmode und ist für die weitere Entwicklung der Flußröhre nicht mehr wesentlich.

3.2 Flußröhren anfänglich im thermischen Gleichgewicht

Die Flußröhren mit $\phi \gtrsim 10^{20} \text{ Mx}$, die zu einem gegebenen Zeitpunkt den thermischen Ausgleich mit ihrer Umgebung erreicht haben und daher einen magnetischen Auftrieb erfahren, müßten in Abwesenheit der konvektiven Strömungen daraufhin die Konvektionszone durchqueren und sie innerhalb von weniger als einem Jahr verlassen (Kap. IV). Im Zusammenhang des vorliegenden Kapitels wollen wir der Frage nachgehen, in wieweit und für welche Feldstärken die großräumig geordnete konvektive Strömung diese Entwicklung ändern kann.

Eine horizontale Flußröhre mit $B_0 \gtrsim 10^4 \text{ G}$, $T_{i0} = T_{e0}$ und innerhalb der letzten Tausende km über dem radiativen Kern wird sich, zunächst von den

schwachen konvektiven Strömungen kaum betroffen, in einer dynamischen Zeitskala über diese untersten Schichten der Konvektionszone erheben. In höheren Niveaus macht sich jedoch die konvektive Strömung bemerkbar; es stellt sich die Frage, ob und auf welcher Höhe sie die aufsteigende Bewegung der mit dem Äußeren nicht mehr thermisch ausgeglichenen Flußröhre im abströmenden Gebiet der Zelle stoppen kann. Bei schwachen Feldern $B < 10^4$ G wächst zwar der Röhrenauftrieb mit der Höhe, denn er wird hauptsächlich von der instabilen Hintergrundsschichtung bestimmt (IV.1); die Flußröhre kann aber nicht weit gegen die konvektive Abwärtsströmung aufsteigen, weil der konvektive Anteil an ihrem Auftrieb (entsprechend $(\frac{\Delta\rho}{\rho_i})_{\text{konv}} = \frac{\Delta Se}{c_p}$, s. IV.1) mindestens bis hoch in der Konvektionszone, etwa $z = 4 \cdot 10^4$ km bei $B_0 = 10^4$ G, kleiner als die Strömungswiderstandskraft ist. Auch stärkere Felder, bis etwa $B_0 = 10^5$ G, bei denen der Auftrieb hauptsächlich durch das Magnetfeld bedingt ist, müssen von der Strömung stark gebremst werden, wie sich leicht durch die Formeln für den Auftrieb von Kap. IV (4.9) und die Werte von v_c aus dem Zellenmodell nachprüfen läßt. Ob die magnetische Krümmungskraft bei diesen stärkeren Feldern zur Überwindung des Strömungswiderstandes ausreicht und zum Aufsteigen der ganzen Röhre bis zur Oberfläche führt, kann man nicht mit einer einfachen Abschätzung herausfinden.

Die numerische Lösung der Gleichungen wird in diesem Abschnitt für Flußröhren mit Anfangsfeldstärken $B_0 = 10^4, 10^{4.5}, 10^5$ und $10^{5.5}$ Gauß in einer Tiefe von 196000 km - also nahe beim Übergang zum radiativen Kern - durchgeführt. (Abb. 6.6a - d). Nach Zurücklegen der ersten 20000 bis 25000 km wird der im abströmenden Gebiet der Zelle aufsteigende Teil der zwei schwächeren Flußröhren jäh gestoppt. Das dann erreichte Niveau, z_F , $z_F \sim 1.77 \cdot 10^5$ km für $B_0 = 10^4$ G, bzw. $z_F \sim 1.71 \cdot 10^5$ km für $B_0 = 10^{4.5}$ G, kann im Laufe der weiteren berechneten Entwicklung kaum überschritten werden. Die konvektive Geschwindigkeit wächst nämlich oberhalb z_F zum Beispiel im Fall $B_0 = 10^4$ G um ca. einen Faktor 10, die entsprechende Widerstandskraft damit um einen Faktor ~ 100 ; weder Krümmungs- noch Auftriebskraft sind in der Lage, diesen hohen Faktor zu überbieten, wofür entweder eine sehr viel stärkere Biegung der Feldlinien oder eine sehr viel größere Dehnung der Flußröhre notwendig wären (vgl. V.3). Es ist trotzdem nicht ausgeschlossen, vor allem im Fall $B_0 = 10^{4.5}$ G, daß im Laufe der weiteren Bewegung der Flußröhre, wenn der oberste Teil derselben die Photosphäre erreicht hat und

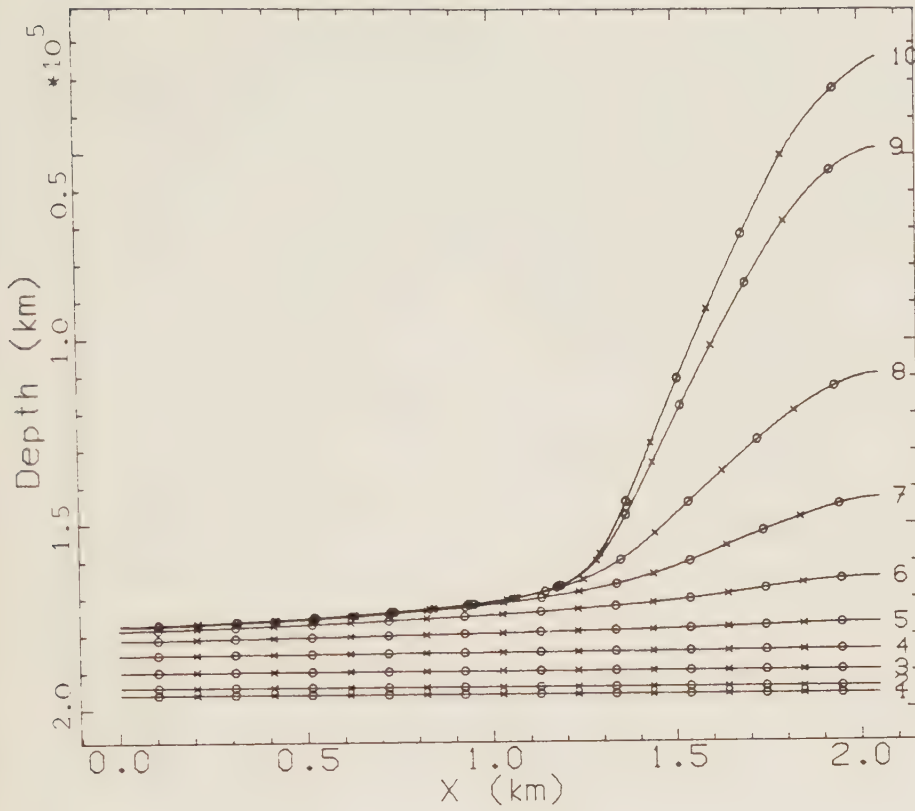


Abb. 6.6 a : $B_0 = 10^4 \text{ G}$

$\Delta t_{10} = 8.17 \cdot 10^4 \text{ sec}$
 $\Delta t_9 = 4.06 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_8 = 4.06 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_7 = 4.06 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_6 = 4.06 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_5 = 3.77 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_4 = 3.75 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_3 = 3.75 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_2 = 3.75 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\cdot 10^5$

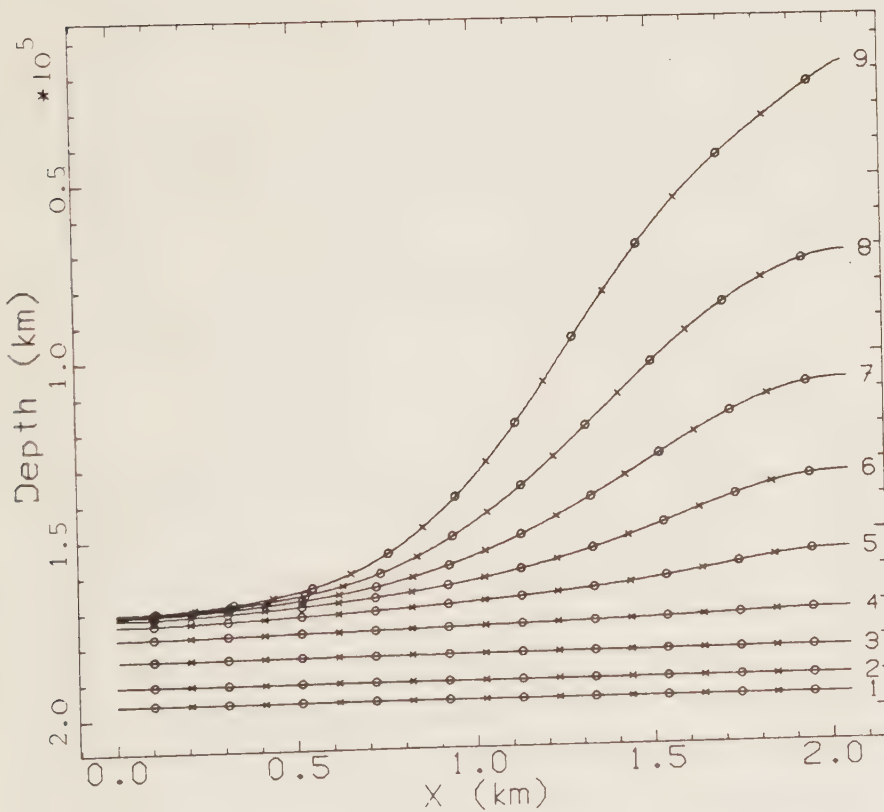


Abb. 6.6 b : $B_0 = 10^{4,5} \text{ G}$

$\Delta t_9 = 2.21 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_8 = 2.57 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_7 = 2.57 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_6 = 2.57 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_5 = 2.57 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_4 = 2.50 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_3 = 2.37 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_2 = 2.37 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\cdot 10^5$

Abb. 6.6 a,b,c,d - Zeitliche Entwicklung einer anfänglich mit dem äußeren Medium thermisch ausgeglichenen horizontalen Flußröhre unter Einwirkung der Strömung des Zellenmodells von Abb. 6.2 - 6.3. (Kennzeichnung wie in Abb. 5.4)

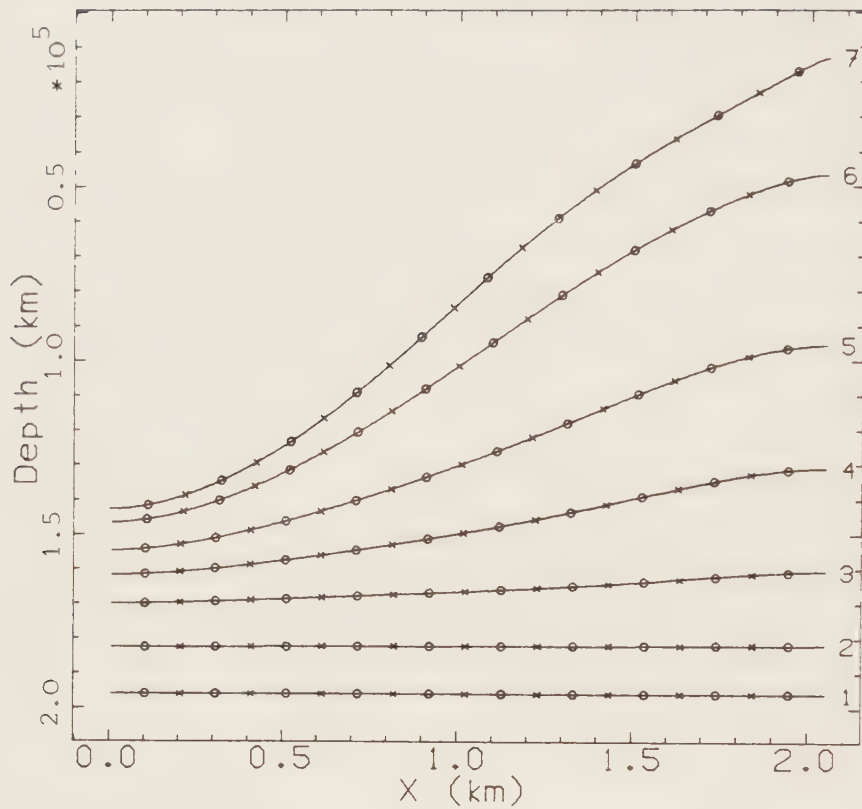


Abb. 6.6 c : $B_0 = 10^5$

$\Delta t_7 = 1.08 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_6 = 2.54 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_5 = 2.35 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_4 = 2.30 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_3 = 2.15 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_2 = 2.00 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\cdot 10^5$

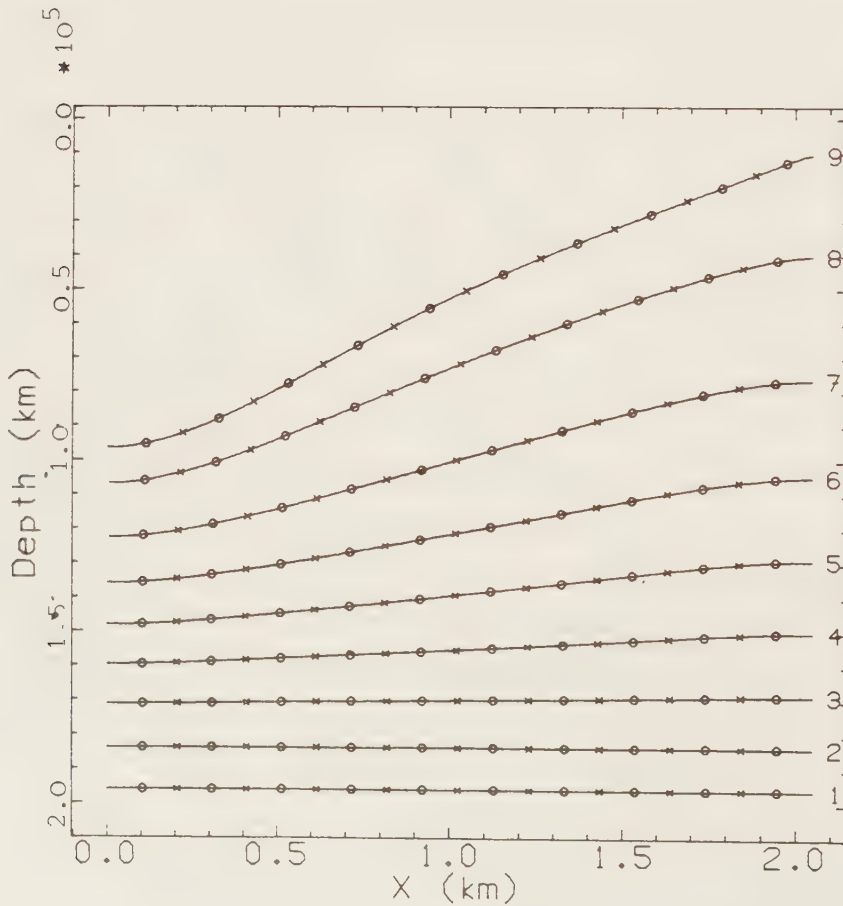


Abb. 6.6 d : $B_0 = 10^{5,5} G$

$\Delta t_9 = 7.08 \cdot 10^4 \text{ sec}$
 $\Delta t_8 = 1.17 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_7 = 1.05 \cdot 10^5 \text{ sec}$
 $\Delta t_6 = 9.62 \cdot 10^4 \text{ sec}$
 $\Delta t_5 = 8.92 \cdot 10^4 \text{ sec}$
 $\Delta t_4 = 8.33 \cdot 10^4 \text{ sec}$
 $\Delta t_3 = 7.77 \cdot 10^4 \text{ sec}$
 $\Delta t_2 = 7.28 \cdot 10^4 \text{ sec}$
 $\cdot 10^5$

sich dann auf der Oberfläche nach links bewegt, die ganze Flußröhre aus der Konvektionszone herausgerissen wird, und zwar durch die auf diese Weise erhöhte Krümmung ihres unteren Teils.

In keinem der berechneten Fälle kommt es zu einem Absinken des jeweils unteren Teiles der Flußröhre, im Gegensatz zu den Fällen des vorigen Abschnittes. Die Materie der Flußröhre bewegt sich im wesentlichen vertikal nach oben ohne seitliche Verschiebungen außer in den obersten Skalenhöhen der Konvektionszone, wie auch an den Bildern zu bemerken ist. (s. die Bewegung der einzelnen Massenelemente der Flußröhre).

Betrachtet man jetzt den Fall mit der höchsten Anfangsfeldstärke, $B_0 = 10^{5.5} \text{ G}$, so kann man feststellen, daß die Flußröhre, anders als bisher, mit einer nur leichten Verformung durch die Konvektionszelle hindurchgehen kann; die Auftriebskraft allein ist hier in der Lage, die im abströmenden Gebiet der Zelle bremsende Wirkung der Konvektion zu überwinden, wie auch eine einfache Analyse aufgrund der Formel (4.9) zeigt. Eine Konvektionszelle wie die hier benutzte ist also nicht in der Lage, eine anfänglich im thermischen Gleichgewicht befindliche Flußröhre mit einer Anfangsfeldstärke höher als 10^5 G in der Konvektionszone zurückzuhalten.

Die Dauer des Aufstiegs des Gipfels der Flußröhre ist i.a. von derselben Größenordnung wie im entsprechenden Fall einer horizontalen Flußröhre ohne Konvektionszelle (IV.2); der Aufstieg wird hier durch die Aufwärtsströmung der Zelle gefördert, woraus sich ein etwas schnellerer Aufstieg ergibt. Ein Vergleich der Aufstiegszeiten mit und ohne Konvektion bietet die folgende Tabelle.

B(Gauß)	Aufstiegszeit	
	mit Konvektionszelle	ohne konvektive Strömungen
10^4	37,2 Tage	67.0 Tage
$10^{4.5}$	22,8 Tage	43.7 Tage
10^5	14,4 Tage	23.4 Tage
$10^{5.5}$	8,2 Tage	10.9 Tage

VII. Zusammenfassung der Ergebnisse und Schlußfolgerungen.

Durch die verschiedenen Untersuchungen dieser Arbeit haben wir versucht, Einsicht in die physikalischen Eigenheiten von isolierten magnetischen Flußröhren in der tiefen Konvektionszone zu gewinnen; dazu wurde das Verhalten der Flußröhren in mehreren dynamischen Prozessen, die sich in der Konvektionszone abspielen können, durch numerische Modellrechnungen simuliert. Sie wurden in drei Gruppen eingeteilt: 1. der Aufstieg von Flußröhren, die zunächst vereinfachend als starr horizontale Gebilde betrachtet werden, durch die Konvektionszone (Kap IV). 2. die Entwicklung von Knickinstabilitäten (Kap V) und, drittens die Einwirkung von großräumigen Konvektionszellen auf die Flußröhrenentwicklung (Kap. VI).

Die in Kap. IV und V errechneten Aufstiegszeiten für anfänglich horizontale Flußröhren verstärken die Vermutungen früherer Autoren (s. Weiss 1983 und seine Literaturangaben), daß der solare Dynamoprozeß nur in der Randzone zwischen Konvektionszone und radiativem Kern stattfindet. Die Berechnung der Entwicklung der Knickinstabilität in horizontalen Flußröhren in der tiefen Konvektionszone (Kap V) ergibt darüber hinaus einen Mechanismus für die Speicherung von Magnetfeldern in den obersten Schichten des radiativen Kernes und liefert ein mögliches Modell für den Ursprung der aktiven Gebiete und ihre subphotosphärische Entwicklung. Es folgt ein Überblick über die wichtigsten Ergebnisse in diesen beiden Kapiteln:

Alle Flußröhren mit $\phi \gtrsim 10^{20}$ Mx, die einmal das thermische Gleichgewicht mit ihrer Umgebung annähernd erreicht haben, steigen durch die Konvektionszone auf und erreichen die Photosphäre in weniger als einem Jahr (IV.2, IV.3). Bei Flußröhren hoher Feldstärke wird dieser schnelle Aufstieg von ihrem starken magnetischen Auftrieb bestimmt, wie bereits durch die Arbeit früherer Autoren bekannt (s. Parker 1979). Aber auch für schwache Felder ist die Aufstiegszeit kurz. Maßgebend ist in diesem Fall die überadiabatische Schichtung der Konvektionszone und die praktisch vollständige thermische Isolierung der aufsteigenden Flußröhre von ihrer Umgebung, die durch die sehr lange charakteristische Zeit für den thermischen Austausch zwischen beiden bedingt ist. Daraus läßt sich folgern, daß eine Flußröhre mit $\phi \gtrsim 10^{20}$ Mx das thermische Gleichgewicht mit der Umgebung durch Strahlungsaustausch nicht erreichen kann, wenn sie nicht in diesem Zustand erzeugt wird. Auch in diesem letzten Fall setzt ein adiabatischer Aufstieg sofort ein, und das thermische Gleichgewicht geht dann verloren.

Ebenso schnell ist der Aufstieg von anfänglich im mechanischen Gleichgewicht befindlichen Flußröhren, wenn sie eine schwache Feldstärke, kleiner als der Äquipartitionswert, besitzen. Denn aufgrund der überadiabatischen Schichtung ist ihr anfängliches Gleichgewicht instabil. Durch die Einwirkung der sie umgebenden Flüssigkeit, etwa durch Strahlungsaustausch (IV.4) oder mechanische Störungen, geht das anfängliche Gleichgewicht leicht verloren, und es kann nicht mehr hergestellt werden; der Aufstieg erfolgt dann in einer kurzen Zeitskala von weniger als zwei Jahren.

Eine lange Aufstiegszeit ergibt sich dagegen bei anfänglich im mechanischen Gleichgewicht befindlichen Flußröhren, die Feldstärken oberhalb des Äquipartitionswertes besitzen, falls sie ihre anfängliche horizontale Gestalt während des Aufstiegs bewahren (IV.4) Grund dafür ist die stabilisierende Wirkung des Magnetfeldes bei Flußröhren im mechanischen Gleichgewicht, die sich aus dem effektiven polytropischen Exponent $\gamma = 2$ des Magnetfeldes, $p_m = \frac{B^2}{8\pi} \propto \rho^2$, ergibt (s. S. 55) und in diesem Fall starker Felder den destabilisierenden Effekt der äußeren Schichtung überwiegt. Der Aufstieg ist dann nur durch Aufheizung infolge von Einstrahlung aus der Umgebung möglich, die die Flußröhre leichter macht, und erfolgt bei genügend starkem Feld quasistatisch und mit einer langsamen, thermisch bedingten Zeitskala.

Reale Flußröhren im mechanischen Gleichgewicht bleiben aber nicht horizontal. Sie sind der Knickinstabilität ausgesetzt, die jede Störung ihrer horizontalen Gestalt mit genügend kurzer Wellenzahl auslösen kann (V.1). Die Entfaltung einer solchen Instabilität bewirkt in Flußröhren hoher Feldstärke, etwa $B \gtrsim 10^{4,5} \text{ G}$, die sich in der tiefen Konvektionszone befinden, einerseits das Absinken eines Teils der Flußröhre bis in den radiativen Kern hinein, wo er wegen der subadiabatischen Hintergrundschichtung zum Stillstand kommt und andererseits das Aufsteigen eines anderen Teiles durch die Konvektionszone bis zur Photosphäre (V.2, V.3). Die Abweichung vom hydrostatischen Gleichgewicht in der sich stark verformenden Flußröhre erzwingt eine anhaltende materielle Abwärtsströmung entlang den Feldlinien. Diese macht den im Kern versunkenen Teil der Flußröhre schwerer gegenüber seiner Umgebung und fördert sein weiteres Absinken; er wird aber durch die subadiabatische Hintergrundsschichtung stabilisiert, so daß er sich sehr langsam innerhalb der obersten Tausende km des radiativen Kernes nach unten bewegt.

Der aufsteigende Teil erreicht die Photosphäre nach einer kurzen Aufstiegszeit - z.B. 86 Tage für $B_0 = 10^5 \text{ G}$, 14 Tage für $B_0 = 10^6 \text{ G}$, jeweils für die Anfangsbedingungen von Kap V - und mit einer hohen Aufstiegs geschwindigkeit, die durch den Auftrieb der Flußröhre in der stark überadiabatischen Schichtung der obersten Konvektionszone bestimmt wird. Nur Flußröhren sehr hoher Anfangsfeldstärke, etwa um $B_0 = 10^6 \text{ G}$, können die letzten tausend km vor der Oberfläche in konzentrierter Form erreichen. Flußröhren mit schwächerer Anfangsfeldstärke, in diesem Modell etwa $B_0 < 10^5 \text{ G}$, ergeben in der Photosphäre ein diffuses Gebiet schwach magnetisierten Plasmas. Diese Schwächung wird hauptsächlich von der Hintergrundsschichtung bestimmt (s. Gl. 5.25, 5.26) und kann selbst durch die beträchtliche Dehnung, die der aufsteigende Teil der Flußröhre erfährt (vgl. Abb. 5.9), nicht kompensiert werden. Die Magnetfeldverteilung mit der Tiefe weist ein Maximum am Boden der Konvektionszone auf (vgl. Van Ballegooijen 1982), dessen Wert kleiner als die Anfangsfeldstärke ist, wie z.B. $B_{\text{max}} = 7 \cdot 10^5 \text{ G}$ bei $B_0 = 10^6 \text{ G}$.

Aufgrund dieser Ergebnisse läßt sich schließen, daß rein toroidale Flußröhren in der Konvektionszone nicht länger als einen Bruchteil einer Sonnenzyklusperiode als solche bestehen können, weil sie in einer dynamischen Zeitskala entweder als ganzes (schwache Felder) oder durch Entwicklung der Knickinstabilität zum Teil (starke Felder) zur Photosphäre befördert werden. Ihre Speicherung für längere Zeiträume kann nur im radiativen Kern erfolgen. Die Flußröhren in den obersten Schichten des Kernes können allerdings, durch Einstrahlung aus der Umgebung angetrieben, auf quasistatischer Weise sehr langsam aufsteigen und schließlich den Kern verlassen. Dieser Verlust wird aber dadurch kompensiert, daß sowohl die aus dem Kern aufsteigenden Flußröhren wie auch irgendwelche andere, die in den tiefsten Schichten der Konvektionszone erzeugt werden, durch die Knickinstabilität teilweise in den Kern abgesenkt werden. Das Vorhandensein von magnetischem Fluß in diesem Gebiet für ausgedehnte Zeiträume, die eine Verstärkung des Magnetfeldes zulassen, wird dadurch ermöglicht.

Ein intensives Überschießen der Konvektion über den unteren Rand der Konvektionszone ins subadiabatische Gebiet sollte das wesentliche dieser Ergebnisse nicht ändern. Die Entropieabnahme nach unten in den obersten Schichten des letzteren wäre dann nämlich weniger steil als sonst, somit die Eindringtiefe der Flußröhre größer. Die Stabilität dieser Konfiguration wäre jedoch wie früher durch die subadiabatische Hintergrundsschichtung gewährleistet.

Die berechnete Entwicklung von Knickinstabilitäten stellt auch ein mögliches Modell für die Vorgeschichte eines aktiven Gebietes vor dem Ausbruch an der Photosphäre dar. Daraus ergibt sich u.a. eine minimale Anfangsfeldstärke zwischen $10^5 G$ und $10^6 G$ für die ursprüngliche horizontale Flußröhre am Boden der Konvektionszone und eine Zeitskala von höchstens einigen wenigen Monaten für die subphotosphärische Entwicklung der Flußröhre bis zu ihrem Ausbruch an der Oberfläche. Zu diesem Zeitpunkt weist die Flußröhre entlang den Feldlinien eine Abweichung vom hydrostatischen Gleichgewicht auf, die maximal ist in der Photosphäre, sowie eine Abwärtsströmung entlang den Feldlinien in der ganzen Flußröhre außer vielleicht in den obersten Schichten der Konvektionszone unmittelbar unter der Photosphäre (V.3). In der weiteren Entwicklung werden sich die zwei Pole des aktiven Gebietes mit entgegengesetzter Polarität voneinander trennen (vgl. Van Balleogooijen 1982). Der Mechanismus, der die zwei Pole nach dem anfänglichen Auseinanderlaufen in einem Abstand von, sagen wir, $2 \cdot 10^5$ km zusammenhält, kann allein durch die Entwicklung einer Knickinstabilität nicht erklärt werden.

Die Anwesenheit von großräumigen Konvektionszellen (Kap VI), die sich über mehrere Dichteskalenhöhen vom Boden der Konvektionszone bis nahe an die Photosphäre erstrecken, kann die soeben aufgeführten Ergebnisse vor allem in zweierlei Hinsicht modifizieren: 1. bei den schwächeren Feldstärken wird der Aufstieg der Flußröhre als ganzes verhindert; 2. die Konvektionszelle kann ihre horizontale Längenskala auch Flußröhren höherer Feldstärke aufprägen und somit den horizontalen Abstand zwischen aufsteigendem Teil und absinkendem Teil der Flußröhre kleiner machen als die für die Entwicklung der Knickinstabilität minimal notwendige Wellenlänge (s.V.1 und V.2) (*).

Ein deutlicher Unterschied zeigt sich zwischen gegenüber der Konvektion starken und schwachen Flußröhren. Bei schwachen Feldern, für das verwendete Zellenmodell für $B_0 < 10^4 G$, wird die anfänglich horizontale Flußröhre unabhängig von ihrem Anfangszustand - $\rho_{i0} = \rho_{e0}$, $T_{i0} = T_{e0}$ - von der Konvektion mitgerissen und um die Zelle gewickelt; der im aufströmenden Gebiet der Zelle befindliche Teil wird zur Photosphäre befördert, der im abströmenden Gebiet

* Die folgenden Ergebnisse beziehen sich auf das Zellenmodell von Kap 6, dessen horizontale Ausdehnung, $2 \cdot 10^5$ km, unterhalb des Halbwertes der minimalen instabilen Wellenlänge für $B_0 > 10^{4,5} G$ in einer Tiefe $z_0 = 1.9 \cdot 10^5$ km, $\frac{\lambda_{\min}}{2} = 3 \cdot 10^5$ km, liegt.

am Boden der Zelle gehalten; je schwächer das Feld desto weniger kann die Flußröhre ins Innere der Zelle eindringen.

Die Flußröhren mit Anfangsfeldstärke um $B_0 = 10^5 \text{ G}$ stellen einen gewissen Übergangsfall dar; am Boden der Konvektionszone, im benutzten Zellenmodell in einem Gebiet von etwa 20000 km Dicke, werden sie von der Konvektion kaum verformt. In höheren Niveaus wird die Verformung und weitere Entwicklung der dort im mechanischen Gleichgewicht befindlichen Flußröhren dieser Feldstärke durch die einsetzende Abwärtsströmung in denselben entschieden gefördert. Diese Abwärtsströmung erhöht nämlich den Auftrieb der oberen Massenelemente und erleichtert die Überwindung der rücktreibenden magnetischen Krümmungskraft. Auf diese Weise erreicht der Flußröhrenteil im aufströmenden Zellengebiet die Photosphäre, während der untere Teil tief in der Konvektionszone verbleibt.

Noch stärkere Felder, etwa $B_0 \gtrsim 10^{5,5} \text{ G}$, werden von der Konvektion in der ganzen Konvektionszone wenig betroffen: anfänglich mit der Umgebung thermisch ausgeglichene Flußröhren steigen auf bis zur Photosphäre, ohne angehalten zu werden. Diejenigen, die sich im unteren Drittel der Konvektionszone im mechanischen Gleichgewicht befinden, werden nur leicht verbogen. Nur durch Entwicklung einer Knickinstabilität kann ein Teil derselben in einer dynamischen Zeitskala bis zur Photosphäre gelangen. In höheren Niveaus regt die Konvektion die Knickinstabilität an, weil hier eine der Normalmoden zu der Wellenlänge, die der doppelten Zellenbreite entspricht, bereits instabil geworden ist. Für die weitere Entwicklung der Instabilität in diesen Flußröhren ist aber die Anwesenheit von konvektiven Strömungen nicht mehr wichtig.

Bei keiner Flußröhre mit $B_0 \gtrsim 10^5 \text{ G}$ kommt es zu einem Eindringen des im abwärtsströmenden Zellengebiet befindliche Teil der Flußröhre in den radiativen Kern, sondern höchstens zu einem langsamen, durch Abwärtsströmung in der Röhre begünstigten Absinken innerhalb der Konvektionszone. Nur bei Flußröhren mit einer Anfangsfeldstärke oberhalb $B_0 \sim 10^{5,5} \text{ G}$ erreicht der aufsteigende Teil die Photosphäre in konzentrierter Form.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Einwirkung von großräumigen Konvektionszellen auf die magnetischen Flußröhren in der tiefen Konvektionszone das Zustandekommen von Strukturen erklären kann, in denen die Flußröhre in der tiefen Konvektionszone verankert bleibt und ein Teil derselben bis zur Photosphäre reicht. Auf diese Weise kann magnetischer Fluß während der Lebensdauer der Zelle in der tiefen Konvektionszone gehalten werden. Die

horizontale Skala der gesamten Struktur ist die doppelte Zellenbreite, $2 \times 2 \cdot 10^5$ km; sie ist kleiner als jede Skala, die für $B_0 \gtrsim 10^{4,5}$ durch die Entwicklung der Knickinstabilität hergestellt werden kann und somit näher an der beobachteten Ausdehnung von Aktivitätsgebieten, $\approx 2 \cdot 10^5$ km. Das Absinken und die Speicherung von Teilen der Flußröhre im Kern sowie die Verformung von Flußröhren hoher Feldstärke, etwa um 10^6 G, die in der unteren Konvektionszone im mechanischen Gleichgewicht liegen, kann nicht durch Konvektionszellen sondern nur durch die Entfaltung einer Knickinstabilität verursacht werden.

Anhang A

Die turbulente Viskosität ν_e .

Für die Bestimmung eines Ausdruckes für den turbulenten Viskositätskoeffizienten ν_e benutzen wir die Begriffe der Mischungswegtheorie (Prandtl 1942). Vergleicht man den Impulstransport durch Moleküle quer zu den Scherflächen in einer viskosen Flüssigkeit in laminarer Bewegung mit dem entsprechenden, viel effektiveren Transport durch turbulente Wirbel in einer turbulenten Flüssigkeit, so kann man schreiben

$$\nu_e = \frac{1}{3} \nu_k l_k' \quad (\text{A.1})$$

wo ν_k und l_k typische Werte der Geschwindigkeit und Skalenlänge der turbulenten Wirbel sind, die für den turbulenten Austausch in der Grenzschicht um die Flußröhre sorgen; ν_k und l_k spielen hier demnach eine ähnliche Rolle wie die thermische Geschwindigkeit und die mittlere freie Weglänge bei der molekularen Viskosität.

Unter der Annahme, daß die Impulsübertragung in der Grenzschicht hauptsächlich durch Wirbel erfolgt, deren Größe mit dem Radius der Röhre vergleichbar ist, kann man $l_k = r$ setzen und das Kolmogorovsche Gesetz benutzen, das ν_k mit der Geschwindigkeit der größten konvektiven Elemente (mit der Längenskala L_{CONV}) verbindet, die sich in der Umgebung der Röhre befinden (Kolmogorov 1941; s.a. Frisch 1976):

$$\nu_k = \nu_{\text{CONV}} \left(\frac{l_k}{L_{\text{CONV}}} \right)^{1/3} \quad (\text{A.2})$$

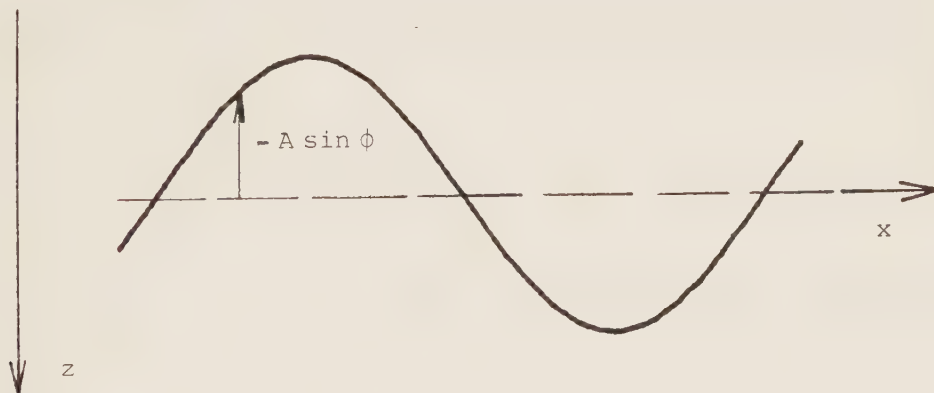
Es ergibt sich dann

$$\nu_e = \frac{1}{3} \cdot \nu_{\text{CONV}} \cdot \left(\frac{r}{L_{\text{CONV}}} \right)^{1/3} \cdot r \quad (\text{A.3})$$

Anhang B

Mehrere physikalische Prozesse führen zum Aufstieg der magnetischen Flußröhren durch die Konvektionszone, wie es sich in Kap. IV gezeigt hat. Diese ausgeprägte Tendenz der magnetischen Flußröhren in der Konvektionszone zum Aufstieg zeigt sich auch in einigen schwächeren nichtlinearen Effekten, die bei einer sinusförmigen Störung einer horizontalen Flußröhre hervorgerufen werden und in einigen Fällen schon bei kleiner Amplitude ein merkliches Ausmaß erreichen. Wir wollen hier zwei dieser Effekte in Betracht ziehen.

Sei $\vec{x}(a) = (x_0 + a \cdot \lambda, z_0)$ die Gestalt der anfänglich ruhenden Flußröhre mit a als einer normierten Lagrange-Koordinate, $a \in [0,1]$. Dieser Flußröhre sei eine Störung der Gestalt $-A \cdot \sin \phi$, $\phi = 2\pi a$, in z -Richtung überlagert:



$$\vec{x}(a) = (x_0 + a\lambda, z_0 - A \sin \phi). \quad (\text{B.1})$$

Die Streckung der Flußröhre wird durch den Koeffizienten St gemessen (Def 5.16),

$$St = (1 + 4\pi^2 \left(\frac{A}{\lambda}\right)^2 \cos^2 \phi)^{1/2}, \quad (\text{B.2})$$

und die Krümmung derselben ist

$$\kappa(a) = \frac{1}{\lambda} \frac{4\pi^2 \frac{A}{\lambda} \sin \phi}{(1 + (\frac{A}{\lambda})^2 4\pi^2 \cos^2 \phi)^{3/2}}. \quad (\text{B.3})$$

Im folgenden nehmen wir stets an, daß $A \ll H_p$, $A \ll H_\rho$ und $A \ll \lambda$.

1) Die Beschleunigung eines Massenelementes der gestörten Flußröhre durch die magnetische Krümmungskraft, b_k , beträgt

$$b_k(a) = \frac{B_o^2(a)}{4\pi\rho(a)} \kappa(a) ; \quad (B.4)$$

mit $B = B_o \frac{\rho_i}{\rho_{io}} \frac{\xi_o}{\xi}$ ergibt sich

$$b_k(a) = \frac{B_o^2}{4\pi\rho_{io}} \frac{1}{\lambda} \frac{\rho_i(a)}{\rho_{io}} \frac{4\pi^2 \frac{A}{\lambda} \sin \phi}{(1 + (\frac{A}{\lambda})^2 4\pi^2 \cos^2 \phi)^{1/2}} . \quad (B.5)$$

Mithilfe der Näherungsverfahren von Kap. IV kann man leicht nachprüfen, daß $\rho_i(a)/\rho_{io}$ in (B.5) durch $\rho_e(a)/\rho_{eo}$ ersetzt werden kann, wenn

$$1 \gg \frac{A}{H_p} \gg \frac{1}{\gamma\beta_o} 4\pi^2 \left(\frac{A}{\lambda}\right)^2 . \quad (B.6)$$

Diese Ungleichheit ist z.B. bei $A = 10^{-2} H_{po}$ und $\lambda \gtrsim H_{po}$ in der tiefen Konvektionszone für alle $B < 10^6$ G erfüllt. Bei kleinen Amplituden, $\frac{A}{H_p} \ll 1$, kann man außerdem $\rho_e(z)$ in erster Näherung wie folgt schreiben:

$$\rho_e(z) \approx \rho_{eo} \left(1 + \frac{z-z_o}{H_p}\right) = \rho_{eo} \left(1 - \frac{A}{H_p} \sin \phi\right) . \quad (B.7)$$

Dann gilt bis zur zweiten Ordnung in $\frac{A}{H_p}$ bzw. $\frac{A}{\lambda}$

$$b_k \approx \frac{B_o^2}{4\pi\rho_{io}} \frac{1}{\lambda} 4\pi^2 \frac{A}{\lambda} \sin \phi \frac{1 - \frac{A}{H_p} \sin \phi}{(1 + (\frac{A}{\lambda})^2 4\pi^2 \cos^2 \phi)^{1/2}} \quad (B.8)$$

$$\approx \frac{B_o^2}{4\pi\rho_{io}} \frac{1}{\lambda} 4\pi^2 \frac{A}{\lambda} \sin \phi \left(1 - \frac{A}{H_p} \sin \phi\right) . \quad (B.9)$$

Um die Netto-Kraft pro Wellenlänge der Röhre, F , zu berechnen, muß man (B.9) mit der Dichte pro Längeneinheit ξ und dem Bogenlängenelement ds multiplizieren und über eine Wellenlänge integrieren. Aus der Definition von a als einer normierten Lagrange-Koordinate ergibt sich $\xi ds = M_T da$, wo M_T die gesamte Masse der Röhre pro Wellenlänge bezeichnet. Somit ist

$$F = M_T \int_0^1 b_k da = -4\pi^2 M_T \frac{g}{\beta_0} \frac{H_{p0}}{H_{\rho_0}} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^2. \quad (B.10)$$

Es ergibt sich also eine Beschleunigung der Flußröhre als ganzes, Γ ,

$$\Gamma = -4\pi^2 \frac{g}{\beta_0} \frac{H_{p0}}{H_{\rho_0}} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^2, \quad (B.11)$$

die nach oben gerichtet und quadratisch in $\frac{A}{\lambda}$ ist.

2) Die Inhomogenität der Konvektionszone verursacht noch andere nicht-lineare Effekte, die zu einer nichtverschwindenden Kraft auf die Flußröhre als ganzes führen. Als zweiten Effekt betrachten wir die Ungleichmäßigkeit der Superadiabatizität in der Konvektionszone. Der Einfachheit halber betrachten wir eine mit der Höhe linear zunehmende Superadiabatizität,

$$\delta(z) = \delta(z_0) \left(1 - \chi \cdot \frac{z-z_0}{H_{p0}}\right), \quad (B.12)$$

mit $\chi = \text{const.}$, $\chi > 0$. Wenn $|\delta| \ll 1$ und $\frac{\Delta z}{H_p} \ll 1$, $\Delta z = z - z_0$, ist

$$H_p \approx H_{p0} \left(1 + \nabla_{ad} \frac{\Delta z}{H_{p0}}\right), \quad (B.13)$$

so daß die dem Ausdruck (B.12) entsprechende Entropieverteilung

$$\frac{s_e(z) - s_{e0}}{c_p} = \delta_0 \int_{z_0}^z \frac{[1 - \chi \frac{\Delta z}{H_{p0}}]}{[1 + \nabla_{ad} \frac{\Delta z}{H_{p0}}]} \frac{dz}{H_{p0}} \approx \delta_0 \int_{z_0}^z [1 - (\chi + \nabla_{ad}) \frac{\Delta z}{H_{p0}}] \frac{dz}{H_{p0}} \quad (B.14)$$

lautet. Im vierten Kapitel hatten wir als konvektiven Auftrieb jenen Anteil des Röhrenauftriebs bezeichnet, der allein auf der Variation der Entropie im äußeren Medium beruht und unabhängig vom Magnetfeld ist. Aus (B.14) ergibt sich in dem hier betrachteten Fall ein konvektiver Auftrieb für die Röhre. Die entsprechende Beschleunigung lautet:

$$g \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{\text{CONV}}^{(a)} = -g \delta_0 \left(\frac{A}{H_p} \sin \phi\right) \left[1 + \frac{1}{2} (\chi + \nabla_{ad}) \frac{A}{H_p} \sin \phi\right]. \quad (B.15)$$

Der Netto-Auftrieb der Flußröhre pro Wellenlänge bekommt man wiederum durch Multiplikation mit ξds und Integration über eine Wellenlänge. Es ergibt sich eine Beschleunigung der Flußröhre als ganzes, Γ_{CONV} ,

$$\Gamma_{\text{CONV}} = -g \delta_o \left(\frac{A}{H_{pO}} \right)^2 \frac{\chi^{+V}_{ad}}{4} , \quad (\text{B.16})$$

die nach oben gerichtet und quadratisch in der kleinen Größe $\frac{A}{H_{pO}}$ ist.

Symbolverzeichnis

a	-	Lagrange-Koordinate entlang der Flußröhre
Δa	-	Größe einer Zelle im numerischen Gitter
A	-	Querschnittsfläche der Flußröhre
a	-	Amplitude einer sinusoidalen Störung der Flußröhre
B	-	Magnetfeldstärke
$B_{\text{Äq}}$	-	Äquipartitionsfeldstärke, $B_{\text{Äq}} \stackrel{\text{def}}{=} (4\pi\rho_e v_{\text{conv}}^2)^{1/2}$
B^*	-	Magnetfeldstärke, bei der die magnetische Brunt-Väisälä-Frequenz Null wird
β	-	p_i/p_m
γ	-	c_p/c_v
c	-	Lichtgeschwindigkeit
C_D	-	Widerstandsbeizahl (II.2)
c_v, c_p	-	Spezifische Wärmen
d	-	Durchmesser der Flußröhre
$\frac{D}{Dt}$	-	Konvektive Ableitung einer Größe der Flüssigkeit
∇	-	$\frac{d \ln T}{d \ln P}$
∇_{ad}	-	$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{ad}}$
Δ, Δ_0	-	Relativer Dichteüberschuß einer in den Kern sinkenden horizontalen Flußröhre (V.2)
δ	-	$\nabla - \nabla_{\text{ad}}$
$\vec{\theta}$	-	Einheitsvektor in tangentialer Richtung zur Flußröhre
η_m	-	Magnetische Diffusivität ($\text{cm}^2 \text{ sec}^{-1}$)
F_D^L	-	Strömungswiderstand pro Längeneinheit der Flußröhre
$\vec{F}_R$	-	Strahlungsflußvektor

g	-	Schwerebeschleunigung
ϕ	-	Magnetischer Fluß
ϕ	-	Potential der Bewegung horizontaler Flußröhren in V.2 (Def. 5.8)
G	-	Verstärkungsmatrix für numerische Instabilitäten
H_p, H_ρ	-	Druckskalenhöhe, Dichteskalenhöhe
H_*	-	Längenskala für die Änderung wichtiger physikalischer Größen entlang der Flußröhre, bzw. für die Änderung von $(\frac{b}{k})^{1/2}$ (in IV.2)
j	-	elektrische Stromdichte
k	-	Wellenzahl
κ	-	Krümmung
κ_T	-	thermische Diffusivität ($\text{cm}^2 \text{ sec}^{-1}$)
ξ	-	Dichte pro Längeneinheit
λ	-	Wellenlänge
λ_{ew}	-	Eigenwert der Matrix G
L_m, L_d	-	Längenskala der größten bzw. kleinsten konvektiven Elemente in der Kolmogorovschen Theorie der Turbulenz
L_{conv}	-	Typische Länge der größten konvektiven Elemente in einer bestimmten Tiefe der Konvektionszone
μ, ν	-	Komponenten des Tangentenvektors $\vec{\tau}$
ν_m, ν_e	-	Kinematische Viskosität (molekular bzw. turbulent)
$\tilde{\mu}$	-	mittleres Molekulargewicht
M	-	$\frac{\nabla_{ad}}{\beta_o} \left(1 - \frac{\rho_e^2(z)}{\rho_{eo}^2} \frac{p_{eo}}{p_e(z)} \right) - \frac{\Delta S_e}{c_p} \quad (\text{def. 4.28b})$
N	-	$\frac{1}{\gamma \beta_o} \left(1 - \frac{\rho_e^2(z)}{\rho_{eo}^2} \frac{p_{eo}}{p_e(z)} \right) + \frac{\Delta S_e}{c_p} \quad (\text{def. 4.37})$
$M_{,z}, N_{,z}$	-	$M_{,z} = \frac{dM}{dz} ; \quad N_{,z} = \frac{dN}{dz} .$
$\vec{N}$	-	Einheitsvektor normal zur Flußröhre.

p	-	Druck; p_i, p_e : Druck im Inneren bzw. außerhalb der Flußröhre
p_m	-	Magnetischer Druck
Q	-	mittlere Wärmeaufnahme pro Zeiteinheit in einer Flußröhre durch Strahlungsaustausch mit der Umgebung
r	-	Radius der Flußröhre
R_{CURV}	-	Krümmungsradius
Re, Re_t, Re_m	-	Reynolds-Zahl, turbulente Reynolds-Zahl, magnetische Reynolds-Zahl.
R	-	Gaskonstante
$\rho; \rho_i, \rho_e$	-	Dichte; Dichte im Innern bzw. außerhalb der Flußröhre
$\Delta\rho$	-	$\rho_i - \rho_e$
s	-	Bogenlänge
$S; S_i, S_e$	-	Spezifische Entropie; spezifische Entropie im Innern bzw. außerhalb der Flußröhre
S_{io}, S_{eo}	-	Spezifische Entropie (innen bzw. außen) am Anfang der Flußröhrenbewegung
ΔS	-	$S_i - S_e$
ΔS_i	-	$S_i(z) - S_{io}$
ΔS_e	-	$S_e(z) - S_{eo}$
St	-	Dehnungskoeffizient $= \xi_0 / \xi = \tau / \tau_0 = \frac{\frac{ds}{da}}{(\frac{ds}{da})_0}$
σ	-	Elektrische Leitfähigkeit
t	-	Zeit
Δt	-	Integrationszeitschritt
T_{ALFVEN}	-	Alfven-Zeit $= \frac{H}{v_A}$
$T; T_i, T_e$	-	Temperatur, Temperatur im Innern bzw. außerhalb der Flußröhre
ΔT	-	$T_i - T_e$
$\vec{\tau}; \tau$	-	Tangentenvektor zur Flußröhre mit Komponenten μ, ν ; $\tau = \vec{\tau} $
τ_A	-	Aufstiegszeit

u, v	-	Horizontal- bzw. Vertikalkomponente der Geschwindigkeit, $u = \frac{Dx}{Dt}, v = \frac{Dz}{Dt}$
$\vec{v}$	-	Geschwindigkeit
v_{conv}	-	Typische Geschwindigkeit der konvektiven Elemente mit Längenskala L_{CONV} .
v_A	-	Alfvén-Geschwindigkeit
v_S	-	Schallgeschwindigkeit
v_T	-	Charakteristische Röhrengeschwindigkeit $\stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_S \cdot v_A}{(v_S^2 + v_A^2)^{1/2}}$
v_{MS}	-	Magnetosonische Geschwindigkeit = $(v_S^2 + v_A^2)^{1/2}$
ω	-	Frequenz
ω_{BV}	-	Brunt-Väisälä-Frequenz
ω_{MBV}	-	Magnetische Brunt-Väisälä-Frequenz
x	-	Horizontalkoordinate
χ	-	$\frac{\Delta T}{T_1}$
$\dot{\chi}$	-	$\frac{d\chi}{dt}$
z	-	Tiefe in der Konvektionszone
z_c	-	Niveau der Konvektionszone, wo der Term $\frac{\Delta S_e}{c_p}$ größer wird als der magnetische Auftrieb in einer aufsteigenden horizontalen Flußröhre (IV.1)
$\tilde{z}$	-	Niveau der Konvektionszone, wo $N_z = 0$ in (4.36), (4.37)
z_w	-	Parameter im Konvektionszellenmodell von Kap. 6 (s. 6.9)
z_o	-	Anfangsniveau einer Flußröhre
z_{cz}	-	gesamte Tiefe der Konvektionszone, $z_{\text{cz}} = 1.98 \cdot 10^5 \text{ km}$ (Spruit 1977)
z_B	-	Tiefstes Niveau, das eine in den Kern sinkende horizontale Flußröhre erreichen kann
ψ	-	Flußfunktion der Strömungen im Konvektionszellenmodell von Kap. 6

Literaturverzeichnis

- Acheson, D.J. (1979), Solar Phys. 62, 23-50
- Basset, A.B. (1961), A Treatise on Hydrodynamics, Vol. 2, Dover Reprint
- Batchelor, G.K. (1967), An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge U.P.
- Beckers, J.M. (1981), The Sun as a Star, St. Jordan ed., CNRS-NASA SP450.
- Beckers, J.M., Schröter, E.H. (1969), Solar Phys. 10, 384
- Böhm, K.H. (1963), Astrophys. J. 138, 297
- Chandrasekhar, S. (1961), Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford U.P.
- Courant, R., Friedrichs, K.O. (1948), Supersonic Flow and Shock Waves,
Interscience Publishers.
- Courant, R., Hilbert, D. (1968), Methoden der mathematischen Physik, Springer V.
- Defouw, R.J. (1976), Astrophys. J. 209, 266-269
- Drobyshevski, E.M., Yuferev, V.S. (1974), J.Fluid Mech. 65, 33-44
- Frisch, U. (1976), Problems of Stellar Convection, E.A. Spiegel, J.P.Zahn,
eds., Springer V., p. 325
- Galloway, D.J., Proctor, M.R.E. (1983), Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics
24, 109-136
- Galloway, D.J., Proctor, M.R.E., Weiss, N.O. (1978), J. Fluid Mech. 87, 243
- Galloway, D.J., Weiss, N.O. (1981), Astrophys. J. 243, 945-953
- Goldstein, S. (1938), Modern Developments in Fluid Dynamics, Dover Reprint
- Golub, L., Rosner, R., Vaiana, G.S., Weiss, N.O. (1981), Astrophys.J. 243,
309-316
- Graham, E. (1975), J. Fluid. Mech 70, 689-703
- Gurm, H.S., Wentzel, D.G. (1967), Astrophys. J. 149, 139-144
- Harvey, J.W. (1977a), Highlights of Astronomy, E.A.Müller (ed.), 4, 223-239
- Harvey, J.W. (1977b), Illustrated Glossary for Solar and Solar-terrestrial
Physics, A. Bruzek, C.J. Durrant, eds, Reidel, Dordrecht
- Harvey, K.L., Harvey, J.W. (1973), Solar Phys. 28, 61-71

- Harvey, K.L., Harvey, J.W., Martin S.F. (1975), *Solar Phys.* 40, 87-102
- Kippenhahn, R., Möllenhof, C. (1975), *Elementare Plasmaphysik*, Bibl. Institut, Mannheim.
- Kolmogorov, A.N. (1941), *Comptes Rendues Acad. Sci USSR* 30, 301
- Kraichnan, R.H (1974), *J. Fluid Mech.* 64, 737
- Kraichnan, R.H. (1976), *J. Fluid Mech.* 77, 753-768
- Krall, N.A., Trivelpiece, A.W. (1973), *Principles of Plasma Physics*, McGraw Hill.
- Krause, F., Rädler, K.H. (1980), *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*, Pergamon Press
- Kuiper, G.P., ed. (1953), *The Sun*, Univ. of Chicago Press.
- Kuznetsov, V.D., Syrovatskii, S.I. (1979), *Soviet Astron.* 23, 715
- Lamb, H. (1932), *Hydrodynamics*, 6. ed., Dover Reprint 1945.
- Landau, L., Lifshitz, E.M. (1974), *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Bd. 6, Akademie Verlag.
- Livingston, W.C., Harvey, J. (1975), *Bull. Am. Astron. Soc.* 7, 346
- Mehlretter, J.P. (1974), *Solar Phys* 38, 43-57
- Maxey, M.R., Riley, J.J. (1983), *Phys. Fluids*, 26, 883-889
- Meyer, F., Schmidt, H.U., Simon, G.W., Weiss, N.O. (1979), *Astron. Astrophys.* 76, 35-45
- Moffat, H.K. (1978), *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, Cambridge U.P.
- Moore, D. (1981), *The Sun as a Star*, S. Jordan, ed. CNRS-NASA SP450
- Moreno-Insertis, F. (1983), *Astron. Astrophys.* 122, 241-250
- Nordlund, Å. (1983), *Solar and Stellar Magnetic Fields: Origins and Coronal Effects*, J.O. Stenflo, ed., IAU Symp. 102, Reidel.
- Oseen, C.W. (1927), *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, Akad. Verlagsges., Leipzig.
- Parker, E.N. (1955a), *Astrophys. J.* 121, 491
- Parker, E.N. (1955b), *Astrophys. J.* 122, 293-314

- Parker, E.N. (1963), *Astrophys. J.* 138, 552-575
- Parker, E.N. (1975), *Astrophys. J.* 198, 205-209
- Parker, E.N. (1978), *Astrophys. J.* 221, 368-377
- Parker, E.N. (1979), *Cosmical Magnetic Fields*, Oxford U.P.
- Pneumann, G.W., Raadu, M.A. (1972), *Astrophys. J.* 172, 739-748
- Prandtl, L. (1942), *Führer durch die Strömungslehre*, Vieweg, Braunschweig
- Proctor, M.R.E., Weiss, N.O. (1982), *Rep. Progress Phys.* 45, 1317-1379
- Richtmyer, R.D., Morton, K.W. (1967), *Difference Methods for Initial Value Problems*, Interscience, New York
- Roache, P.J. (1976), *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Pub. Albuquerque.
- Roberts, B., Webb, A.R. (1978), *Solar Phys.* 56, 5
- Roxburgh, I.W. (1965), *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 130, 223-228
- Saslaw, W.C., Schwarzschild, M. (1965), *Astrophys. J.* 142, 1468
- Sauer, R., Szabo, I. (Hrsg.) (1967), *Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs*, Springer.
- Schmidt, H.U. (1980), Private Mitteilung.
- Schmitt, J.H.M.M, Rosner, R. (1983), *Astrophys.J.* 265, 901-924
- Schröter, E.H., Wöhl, H. (1976), *Solar Phys.* 49, 19
- Schüßler, M. (1977), *Astron. Astrophys.* 56, 439-442
- Schüßler, M. (1979), *Astron. Astrophys.* 71, 79-91
- Schüßler, M. (1980), *Astron. Astrophys.* 89, 26-32
- Simon, G.W., Weiss, N.O. (1968), *Z. für Astrophysik* 69, 435-450
- Spiegel, E.A., Weiss, N.O. (1980), *Nature* 287, 616-617
- Spruit, H.C. (1977), *Dissertation*, Universität von Utrecht
- Spruit, H.C. (1979), *Solar Phys.* 61, 363-378
- Spruit, H.C. (1981), *Astron. Astrophys.* 62, 15-22
- Spruit, H.C., Van Ballegooijen, A.A. (1982), *Astron. Astrophys.* 106, 58-66

- Steenbeck, M., Krause, F. (1966), Z. Naturforsch. 21a, 1285 - 1296
- Steenbeck, M., Krause, F., Rädler, K.H. (1966), Z. Naturforsch. 21a, 369-376
- Stenflo., J.O., Lindegren, L. (1977), Astron. Astrophys. 59, 367-378
- Stix, M. (1976), Basic Mechanisms of Solar Activity, V.Bumba, J. Kleckzek, eds., IAU Symp. 71, 367-388
- Stix, M. (1981), Solar Phys. 74, 79-101
- Tarbell, T.D., Title, A.M., Schoolman, S.A. (1979), Astrophys. J. 229, 387-392
- Tritton, D.J. (1977), Physical Fluid Dynamics, Van Nostrand Reinhold.
- Unno, W., Ribes, E. (1976), Astrophys. J. 208, 222-223
- Unsöld, A. (1955), Physik der Sternatmosphären, Springer, Berlin.
- Van Ballegooijen, A.A. (1982), Astron. Astrophys. 106, 43-52
- Van Ballegooijen, A.A. (1982b), Astron. Astrophys. 113, 99-112
- Weiss, N.O. (1966), Proc. Roy. Soc. Lon A293, 310
- Weiss, N.O. (1983), Stellar and planetary Magnetic Fields, A. Soward, ed., Gordon and Breach, London.
- Zwaan, C. (1981), The Sun as a Star, S. Jordan, ed. NASA-CNRS SP450

Danksagung

Ich danke Herrn Dr. H.U.Schmidt für die Betreuung der Arbeit und viele hilfreiche Anmerkungen zum vorliegenden Text; ihm und Herrn Dr. H.C.Spruit bin ich für wertvolle Anregungen und Diskussionen zu Dank verpflichtet. Mein Dank gilt auch den Herren Dr. F. Meyer, Dr. D.J. Galloway und Dr. M.Schüßler für fördernde Gespräche.

Schließlich möchte ich Herrn Prof. Dr. R.Kippenhahn dafür danken, daß ich diese Arbeit am Max-Planck-Institut für Astrophysik ausführen konnte.

Lebenslauf

- 6.3.1955 Geboren in Madrid (Spanien) als Sohn des Juristen
Fernando Moreno und seiner Ehefrau Josefina Insertis
- 1961/71 Schulbesuch in Madrid
- 7.1971 Bachillerato Superior (Abitur) am Instituto San Isidro
(Gymnasium), Madrid, Naturwissenschaftlicher Zweig.
- 1972/77 Physikstudium an der Universidad Complutense, Madrid,
im Fach Theoretische Physik
- 1977/78 Diplomarbeit in Physik bei Prof. F.G.Gascon an der
Universidad Complutense, Madrid. Veröffentlichung
derselben in der Zeitschrift Nuovo Cimento (Lett.)
- 1978/79 Assistent an der Universidad Complutense, Fakultät
für Mathematik
- 1980/83 Promotionsstipendium der Max-Planck-Gesellschaft
am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik,
Institut für Astrophysik.
- Seit 2.1983 wissenschaftlicher Angestellter am M.P.I. für Astro-
physik.

